

PROBLEMA 775. Barroso R.(2016):Comunicación personal

Solución: José Montes Valderrama

Maestro del Centro Público de Educación de Adultos «Triana» (Sevilla)

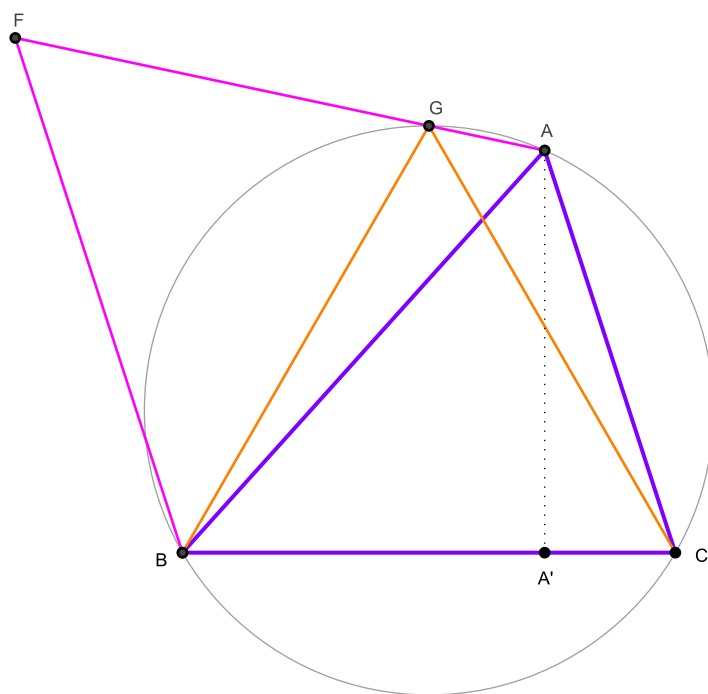
1. Enunciado

Sea ABC con $AB > AC$.

Sea ABF equilátero hacia fuera de ABC .

Sea BCG equilátero hacia dentro de ABC

G pertenece a AF si y solo si $\angle A = 60^\circ$



1. $G \in AF \Rightarrow \angle A = 60^\circ$

Teniendo en cuenta que $\angle BAG = \angle BCG = 60^\circ \Rightarrow$ el cuadrilátero $AGBC$ es cíclico, y por tanto $\angle CGB = \angle CAB = 60^\circ$

2. $\angle A = 60^\circ \Rightarrow G \in AF$

Si $G \in AF$ se ha de verificar que $\mathbf{AF} = \mathbf{FG} + \mathbf{GA}$

- ALTURA DE $A = AA'$

Aplicando el teorema del coseno en $\triangle ABC$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = a^2 + c^2 - 2ac \frac{BA'}{c} \Rightarrow BA' = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$$

$$\text{Luego } AA' = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right)^2} = \frac{\sqrt{-a^4 + 2a^2b^2 - b^4 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4}}{2a} \quad (I)$$

Pero siendo $\angle A = 60^\circ \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 60^\circ = b^2 + c^2 - bc$, valor que sustituido en (I) determina el valor para la altura $AA' = \frac{bc\sqrt{3}}{2a}$

- FG, GA

Al ser la suma angular $B + C = 120^\circ$ y $AC < AB \Rightarrow B < 60^\circ$ y $C > 60^\circ \Rightarrow B = 120^\circ - C \Rightarrow \angle GBA = 60^\circ - (120^\circ - C) = C - 60^\circ \Rightarrow \angle FBG = 60^\circ - (C - 60^\circ) = 120^\circ - C$

Aplicando el teorema del seno en $\triangle AGC$ y $\triangle GFB$

$$\frac{GA}{\sin(C - 60^\circ)} = \frac{a}{\sin 120^\circ} \Rightarrow GA = \frac{a \sin(C - 60^\circ)}{\sin 120^\circ}$$

$$\frac{FG}{\sin(120^\circ - C)} = \frac{a}{\sin 60^\circ} \Rightarrow FG = \frac{a \sin(120^\circ - C)}{\sin 60^\circ}$$

- $AF = FG + GA$

Siendo $\sin 60^\circ = \sin 120^\circ$ y $\cos 60^\circ = -\cos 120^\circ$

$$\begin{aligned} FG + GA &= \frac{a \sin(120^\circ - C)}{\sin 60^\circ} + \frac{a \sin(C - 60^\circ)}{\sin 120^\circ} = \frac{a(\sin(120^\circ - C) + \sin(C - 60^\circ))}{\sin 60^\circ} = \\ &= \frac{a(\sin 120^\circ \cos C - \cos 120^\circ \sin C + \sin C \cos 60^\circ - \cos C \sin 60^\circ)}{\sin 60^\circ} = \\ &= \frac{a(\sin 60^\circ \cos C + \cos 60^\circ \sin C + \sin C \cos 60^\circ - \cos C \sin 60^\circ)}{\sin 60^\circ} = \frac{2a \cos 60^\circ \sin C}{\sin 60^\circ} = \frac{2a \sin C}{\sqrt{3}} = \end{aligned}$$

$$\frac{2a \frac{AA'}{b}}{\sqrt{3}} = \frac{2a \frac{\frac{bc\sqrt{3}}{2a}}{b}}{\sqrt{3}} = c = AF$$