

Problema 775

Siga $\triangle ABC$ amb $\overline{AB} > \overline{AC}$.

Siga el triangle equilàter $\triangle ABF$ exterior al triangle $\triangle ABC$.

Siga el triangle equilàter $\triangle BCG$ cap al interior del triangle $\triangle ABC$.

G pertany a $\overline{AF}$ si i només si $A = 60^\circ$.

Solució de Ricard Peiró:

($\Leftarrow$)

Suposem que $A = 60^\circ$. Considerem la circumferència circumscrita al triangle $\triangle ABC$.

La circumferència talla el costat $\overline{AF}$ del triangle $\triangle ABF$ en el punt P.

El quadrilàter APBC és inscriptible.

Aplicant el teorema de Tolomeu:

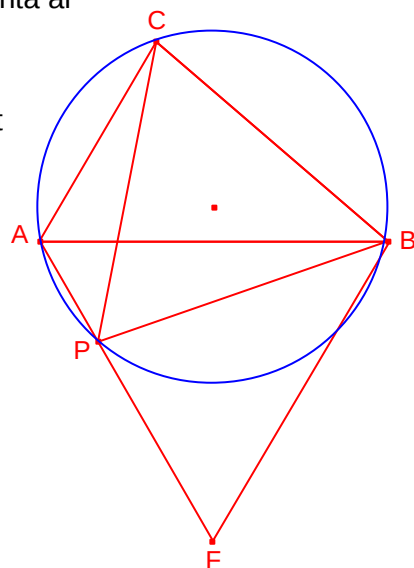
$$\angle PBC = 180^\circ - \angle CAF = 60^\circ.$$

$$\widehat{BP} = 360^\circ - (\widehat{PC} + \widehat{BC}) = 120^\circ.$$

$$\angle PCB = \frac{1}{2} 120^\circ = 60^\circ.$$

Aleshores, el triangle $\triangle BCP$ és equilàter.

Aleshores, $P = Q$.



($\Rightarrow$)

Suposem que G pertany a $\overline{AF}$.

Considerem la circumferència circumscrita al triangle equilàter $\triangle BCG$

$$\angle GAB = 60^\circ = \angle GCB.$$

Aplicant el teorema de Tolomeu el quadrilàter AGBC és inscriptible:

$$\angle BAC = \angle BGC = 60^\circ.$$

Aleshores, $A = 60^\circ$

