Problema 775

Sea $\overset{\Delta}{ABC}$ con $\overline{AB} > \overline{AC}$.

Sea A $\overset{\Delta}{ABF}$ equilátero hacia fuera de $\overset{\Delta}{ABC}$.

Sea $\overset{\Delta}{BCG}$ equilátero hacia dentro de $\overset{\Delta}{ABC}$.

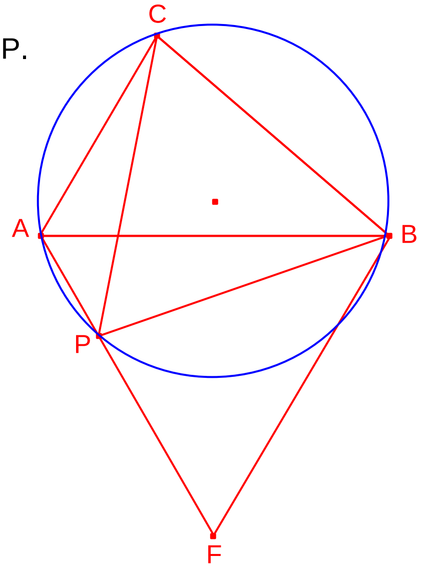
G pertenece a $\overline{AF}$ si y sólo si $A = 60º$.

Barroso R. (2016): Comunicación personal.

Solución de Ricard Peiró:

$(\Leftarrow)$

Supongamos que $A = 60º$. Consideremos la circunferencia circunscrita al triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$.



La circunferencia corta el lado $\overline{AF}$ del triángulo $\overset{\Delta}{ABF}$ en el punto P.

El cuadrilátero APBC es inscriptible.

Aplicando el teorema de Tolomeo:

$\angle PBC = 180º - \angle CAF = 60º$.

$\overset{\frown}{BP} = 360º - (\overset{\frown}{PC} + \overset{\frown}{BC}) = 120º$.

$\angle PCB = \frac{1}{2} 120º = 60º$.

Entonces, el triángulo $\overset{\Delta}{BCP}$ es equilátero.

Entonces, $P = Q$.

$(\Rightarrow)$

Supongamos que G pertenece a $\overline{AF}$.

Consideremos la circunferencia circunscrita al triángulo equilátero $\overset{\Delta}{BCG}$

$\angle GAB = 60º = \angle GCB$.

Aplicando el teorema de Tolomeo el cuadrilátero AGBC es inscriptible:

$\angle BAC = \angle BGC = 60º$.

Entonces, $A = 60º$