

Problema 775.

Sea ABC con $AB > AC$.

Sea ABF equilátero hacia fuera de ABC.

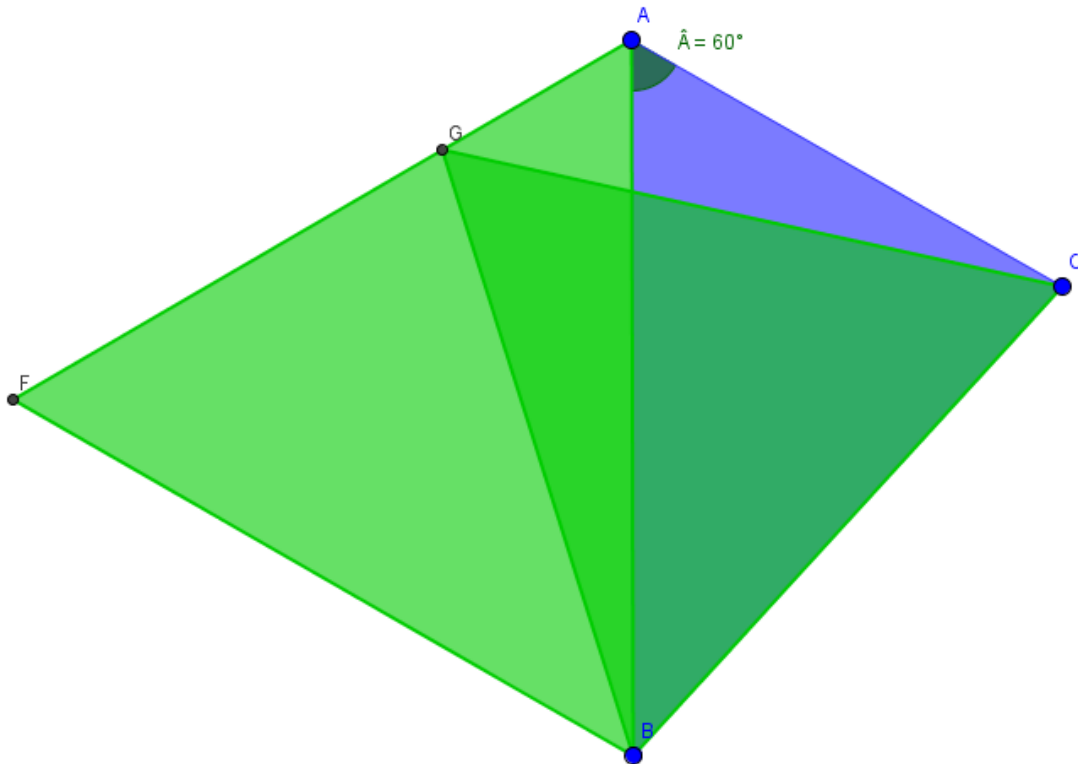
Sea BCG equilátero hacia dentro de ABC.

G pertenece a AF si y sólo si $\hat{A} = 60^\circ$

Barroso R. (2016): Comunicación personal.

Juan Antonio Villegas Recio, alumno de 2º Bach del I.E.S. Blas Infante (Córdoba)

El esquema que define el enunciado es el siguiente:



Para que G pertenezca a AF, deben existir dos ángulos, $\widehat{FGB}$, que llamaremos α , y $\widehat{AGC}$, que llamaremos β . Se tiene que cumplir que $\alpha + \beta = 120^\circ$, porque el ángulo $\widehat{BGC} = 60^\circ$, al ser un ángulo de un triángulo equilátero.

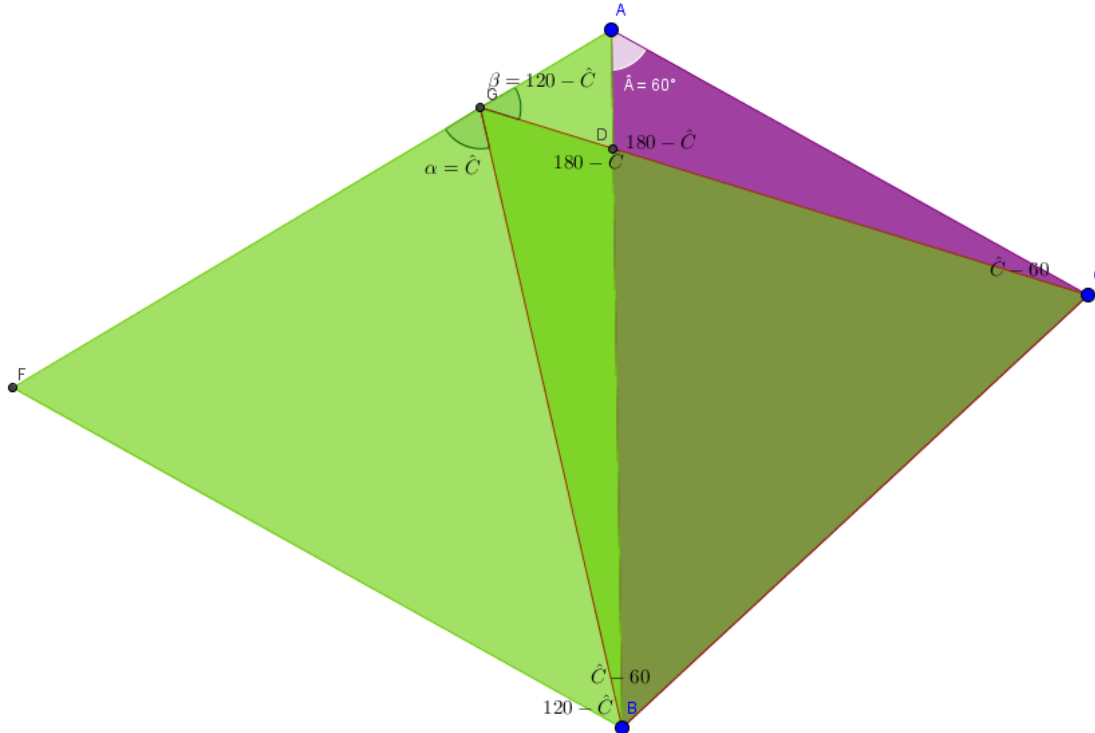
Así:

1. Demostrar que si $\hat{A} = 60^\circ$, $\alpha + \beta = 120^\circ$.

Para demostrarlo, despejaremos α y β en función del ángulo $\hat{C}$.

Primero nos centraremos en β , y en el triángulo AGC. El ángulo $\hat{A}=120^\circ$, y C sería $\hat{C}-60$, así que $\beta = 180 - 120 - (\hat{C} - 60)$; $\beta = 120 - \hat{C}$

Sin embargo, despejar α no es tan sencillo, para llegar hasta ahí disponemos del siguiente esquema:



- Con respecto al ángulo $\widehat{ADC}$, si $\hat{A}=60$ y $\widehat{ACD}=\hat{C}-60$, $\widehat{ADC}=180-60-(\hat{C}-60)=180-\hat{C}$.
- Por lo tanto, $\widehat{GDB}=180-\hat{C}$.
- Para el ángulo $\widehat{GBD}$, si $\widehat{BGD}=60$. $\widehat{GBD}=180-60-(180-\hat{C})= \hat{C}-60$.
- Como $\widehat{DBG}$ y $\widehat{GBF}$ tienen que sumar 60° , entonces $\widehat{GBF}=60-(\hat{C}-60)=120-\hat{C}$
- Por último, $\alpha=180-60-(120-\hat{C})=\hat{C}$; $\alpha=\hat{C}$

Llegados a esta conclusión, recordamos que hay que demostrar que $\alpha+\beta=120^\circ$, así, sustituyendo:

$$\alpha + \beta = 120; \hat{C} + (120 - \hat{C}) = 120$$

Queda demostrado que

si $\hat{A}=60^\circ$, $G \in \overline{AF}$.

2. Demostrar que si $\alpha+\beta=120$, $\hat{A}=60$.

De existir dos ángulos con vértice común G, el ángulo $\hat{A}$ debe medir 60° .

- Alumno de 2ºBachillerato del I.E.S. Blas Infante (Córdoba).**