

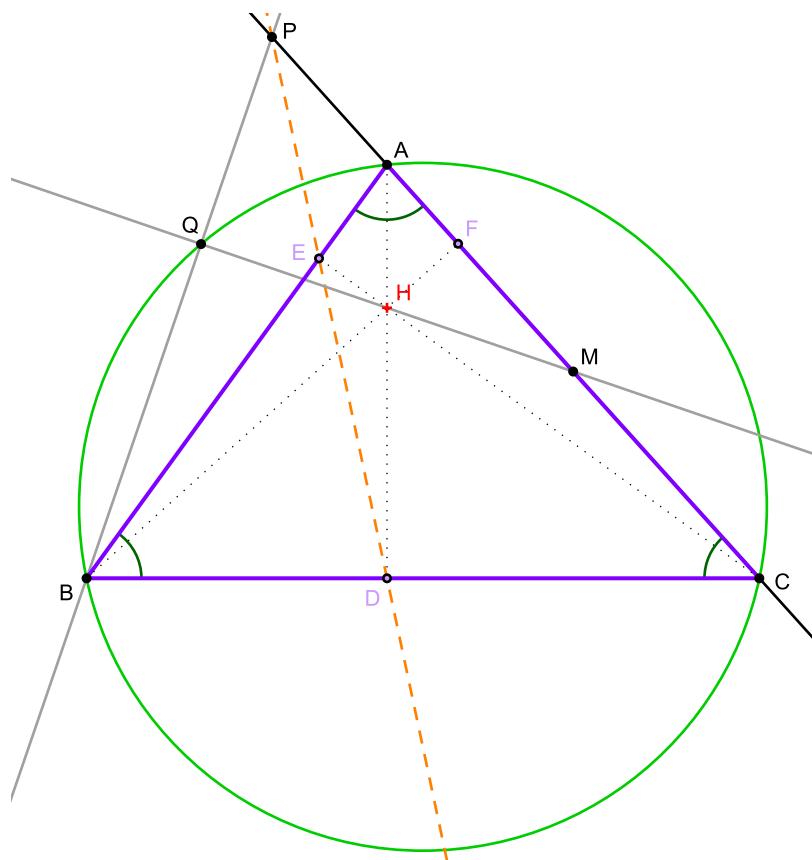
PROBLEMA 776. Propuesto por Philippe Fondanaiche (2016): Comunicación personal

Solución: José Montes Valderrama

Maestro del Centro Público de Educación de Adultos «Triana» (Sevilla)

1. Enunciado

ABC es un triángulo escaleno. Denotamos por (Γ) el círculo circunscrito, el ortocentro H , las alturas AD y CE , M el punto medio del lado AC . La recta (DE) y la recta (AC) se cortan en el punto P . Demostrar que las rectas (BP) y (HM) son perpendiculares y que su punto de encuentro es en el círculo (Γ) .



2. Las rectas BP y HM son perpendiculares

Si se considera el origen de coordenadas rectangulares en $D(0,0)$ se tiene que

$A(0, h)$, $B(e, 0)$, $C(k, 0)$, $M\left(\frac{k}{2}, \frac{h}{2}\right)$ y siendo

$$e = -\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a} \quad k = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \quad h = \frac{\sqrt{-a^4 + 2a^2b^2 - b^4 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4}}{2a}$$

se obtiene la proyección $E\left(\frac{(a^2 - b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)}{4ac^2}, \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c^2}h\right)$

el ortocentro $H\left(0, \frac{a^4 - b^4 + 2b^2c^2 - c^4}{4a^2h}\right)$

y el punto $P\left(\frac{(a^2 - b^2 - c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{4a(a^2 - c^2)}, \frac{(a^2 + b^2 - c^2)h}{2(a^2 - c^2)}\right)$

siendo

$$m_{BP} = \frac{2a(a^2 + b^2 - c^2)h}{3a^4 - 2a^2b^2 - b^4 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4}$$

$$m_{HM} = \frac{-3a^4 + 2a^2b^2 + b^4 + 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + c^4}{2a(a^2 + b^2 - c^2)h}$$

verificándose que la relación entre sus pendientes $m_{BP} = \frac{-1}{m_{HM}} \Rightarrow BP \perp HM$

3. Q está en la circunferencia circunscrita

Si $Q \in \Gamma \Rightarrow$ el cuadrilátero $AQBC$ es cíclico y por ello $\angle AQB + \angle BCA = 180^\circ$, razón por la cual habrá que demostrar que **$\angle AQB = 180^\circ - \hat{C}$**

- $\angle DQB = \hat{C}$ y $\angle MQD = \angle HQD = 90^\circ - \hat{C}$

El cuadrilátero $BDHQ$ es cíclico, pues los ángulos opuestos $\angle HQB$ y $\angle BDH$ son rectos.

Teniendo en cuenta que $\angle HBD = \angle FBC = 90^\circ - \hat{C} \Rightarrow \angle DHB = 90^\circ - (90^\circ - \hat{C}) = \hat{C} \Rightarrow \angle DQB = \hat{C}$

y como $BQ \perp HQ \Rightarrow \angle HQD = 90^\circ - \angle DQB = 90^\circ - \hat{C} = \angle MQD$

- $\angle DMA = 2\hat{C}$

La circunferencia con centro en el punto medio de un lado y radio mitad de ese lado pasa por los pies de las alturas de los otros dos. Esta propiedad garantiza que en el triángulo isósceles CMD , $\overline{MC} = \overline{MD} \Rightarrow \angle CMD = 180^\circ - 2\hat{C} \Rightarrow \angle DMA = 180^\circ - (180^\circ - 2\hat{C}) = 2\hat{C}$

- El cuadrilátero $AQDM$ es cíclico

En el triángulo rectángulo CAD , $\angle CAD = \angle MAD = 90^\circ - \hat{C}$

Puede deducirse entonces que si $\angle MAD = 90^\circ - \hat{C}$ y $\angle MQD = 90^\circ - \hat{C} \Rightarrow \square AQDM$ es cíclico

Al ser $\square AQDM$ cíclico, $\angle DMA$ y $\angle AQD$ son suplementarios y por ello $AQD = 180^\circ - 2\hat{C}$

- $\angle AQB = 180^\circ - \hat{C}$

$$\angle AQB = \angle AQD + \angle DQB = 180^\circ - 2\hat{C} + \hat{C} = \mathbf{180^\circ - \hat{C}}$$