Problema 777 de *triánguloscabri*. *Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo ABC. Si*

$$b(a+b)(b+c) = a^3 + b(a^2+c^2) + c^3,$$

demostrar que las medidas de los ángulos A, B, C (en radianes) cumplen la relación

$$\frac{1}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} + \frac{1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}} = \frac{2}{\sqrt{A}+\sqrt{C}}.$$

Solución de *Francisco Javier García Capitán*. Teniendo en cuenta la identidad

$$a^3 + c^3 + b(a^2+c^2) - b(a+b)(b+c) = (a+b+c)(a^2+c^2-b^2-ac),$$

nuestro triángulo debe cumplir $b^2 = a^2+c^2-ac$, por lo que $B = 60°$.

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $A \leqslant B \leqslant C$ y podemos expresar, en radianes,

$$A = \frac{\pi}{3}(1-t), \quad B = \frac{\pi}{3}, \quad C = \frac{\pi}{3}(1+t)$$

y solo debemos comprobar que se cumple

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{1-t}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{1+t}} = \frac{2}{\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}} \\
\Leftrightarrow &\frac{1-\sqrt{1-t}}{t} + \frac{\sqrt{1+t}-1}{t} = \frac{2}{\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}} \\
\Leftrightarrow &\frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}{t} = \frac{2}{\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}} \\
\Leftrightarrow &\left(\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}\right)\left(\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}\right) = 2t.
\end{aligned}$$

lo cual es evidente.