Problema 777 Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo ABC. Si $b(a+b)(b+c) = a^3 + b(a^2+c^2) + c^3$, demuestra que las medidas de los ángulos A, B, C (en radianes) cumplen la relación

$$\frac{1}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} + \frac{1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}} = \frac{2}{\sqrt{A}+\sqrt{C}}. \tag{1}$$

Solución por José H. Nieto, Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela.

La condición se puede escribir $a^3 + b(a^2+c^2) + c^3 - b(a+b)(b+c) = 0$, que se factoriza como $(a+b+c)(a^2+c^2-b^2-ac) = 0$. Como $a+b+c > 0$, esto equivale a $a^2+c^2-b^2-ac = 0$, o sea (por el teorema del coseno) a

$$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{1}{2}, \tag{2}$$

es decir a $B = \frac{\pi}{3}$.

Ahora veremos que (1) también es equivalente a $B = \frac{\pi}{3}$. Multiplicando por $(\sqrt{A}+\sqrt{B})(\sqrt{B}+\sqrt{C})(\sqrt{A}+\sqrt{C})$ resulta

$$(\sqrt{A}+2\sqrt{B}+\sqrt{C})(\sqrt{A}+\sqrt{C}) = 2(B + (\sqrt{A}+\sqrt{C})\sqrt{B} + \sqrt{AC}),$$

o sea

$$(\sqrt{A}+\sqrt{C})^2 = 2B + 2\sqrt{AC},$$

que se reduce a $A + C = 2B$. Pero $A + C = \pi - B$, luego (1) equivale a $B = \frac{\pi}{3}$.