

Problema # 777

Sean a , b y c las longitudes de los lados de un triángulo ABC. Si $b(a + b)(b + c) = a^3 + b(a^2 + c^2) + c^3$, demuestramos que las medidas de los ángulos A, B, C (en radianes) cumplen la relación

$$\frac{1}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} + \frac{1}{\sqrt{B} + \sqrt{C}} = \frac{2}{\sqrt{A} + \sqrt{C}}$$

Solution proposée par Philippe Fondanaiche

Comme les angles A, B, C sont tous trois > 0 , la relation $\frac{1}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} + \frac{1}{\sqrt{B} + \sqrt{C}} = \frac{2}{\sqrt{A} + \sqrt{C}}$ peut encore s'écrire

$$(\sqrt{A} + 2\sqrt{B} + \sqrt{C})(\sqrt{A} + \sqrt{C}) = 2(\sqrt{A} + \sqrt{B})(\sqrt{B} + \sqrt{C}).$$

Après développement des deux membres, les radicaux $\sqrt{AB}$, $\sqrt{BC}$ et $\sqrt{CA}$ disparaissent et il ne reste plus que l'équation $A + C = 2B$. Comme $A + B + C = \pi$, on en déduit **$B = \pi/3$** .

Soit (R) la relation entre les longueurs des côtés du triangle ABC : $b(a + b)(b + c) = a^3 + b(a^2 + c^2) + c^3$.

D'après la loi des cosinus dans le triangle, on a $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(B)$. D'où $a^2 + c^2 = b^2 + 2ac \cdot \cos(B)$.

La relation (R) s'écrit alors:

$$b(a + b)(b + c) = b(ab + b^2 + ac + bc) = ab^2 + b^3 + abc + b^2c = a^3 + c^3 + b^3 + 2abc \cdot \cos(B)$$

qui se ramène à: $a^3 + c^3 - b^2(a + c) = abc(1 - 2\cos(B))$.

Comme $a^3 + c^3 = (a + c)(a^2 + c^2 - ac)$, on obtient :

$$(a + c)(a^2 + c^2 - ac - b^2) = ac(a + c)(2\cos(B) - 1) = abc(1 - 2\cos(B))$$

Comme a, b et c sont > 0 , on a $(a + c - b)(1 - 2\cos(B)) = 0$.

Cette dernière égalité entraîne $\cos(B) = 1/2$. D'où **$B = \pi/3$** . Cqfd