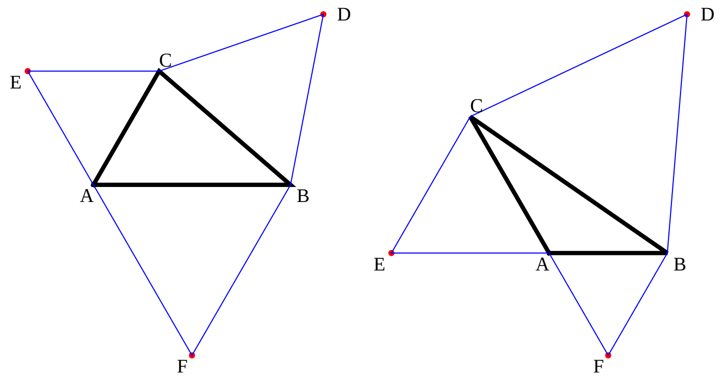
Pr. Cabri 778
propuesto por C. Beade

Enunciado

Sea el triángulo ABC. Sobre el exterior de sus lados se dibujan los triángulo equiláteros BCD, ACE y ABF de áreas P, Q, R, respectivamente. Sea S el área del triángulo ABC Probar que P - S = Q + R si y sólo si el ángulo BAC mide 120 º.

Solución de César Beade

Sea el triángulo ABC con vértices A(0,0), B(1,0) y C(a,am). Es decir, C está sobre la recta de pendiente m que pasa por A.



En estas condiciones, $D=(\frac{1+a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\ a\,m,\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\ (1-a)+\frac{a\,m}{2})$, $E=(\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\ a\,m,\ \frac{\sqrt{3}\ a}{2}+\frac{a\,m}{2})$ y $F=(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Las áreas de los triángulos son:

$S=\frac{a\,m}{2}$, $P=\frac{1}{4}\sqrt{3}\left(1-2\,a+a^2\left(1+m^2\right)\right)$, $Q=\frac{1}{4}\sqrt{3}\ a^2\left(1+m^2\right)$ y $R=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Vamos a calcular una relación general entre P, Q, R y S y para ello resolvemos, en k, la ecuación P+kS = Q+R.

Obtenemos $k=\frac{\sqrt{3}}{m}=\frac{\sqrt{3}}{\text{tgA}}$.

Si $k=1 \Leftrightarrow m=\sqrt{3} \Leftrightarrow \sphericalangle A=60^\circ \Leftrightarrow P+S=Q+R$ (problema 774)

Y si $k=-1 \Leftrightarrow m=-\sqrt{3} \Leftrightarrow \sphericalangle A=120^\circ \Leftrightarrow P-S=Q+R$ (problema 778)

Y podríamos extender el problema construyendo sobre los lados otras figuras en lugar de triángulos equiláteros.