Problema 778 Sea el triángulo ABC. Sobre el exterior de sus lados se dibujan los triángulo equiláteros BCD, ACE y ABF de áreas P, Q, R, respectivamente. Sea S el área del triángulo ABC. Probar que $P - S = Q + R$ si y sólo si el ángulo BAC mide 120°.

(Propuesto por César Beade Franco, del I. E. S. Fernando Blanco, Cee, A Coruña.)

Solución por José H. Nieto, Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela.

Sean $\alpha = \angle BAC$, $a = BC$, $b = CA$ y $c = AB$. Como $P = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, $Q = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2$,$R = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$ y $S = \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} \alpha$, la condición $P - S = Q + R$ es equivalente a

$$\frac{1}{2}bc \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 - b^2 - c^2),$$

que por el teorema del coseno equivale a

$$\frac{1}{2}bc \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}(-2bc \cos \alpha),$$

es decir a $\tan \alpha = -\sqrt{3}$, o sea $\alpha = 120°$.