

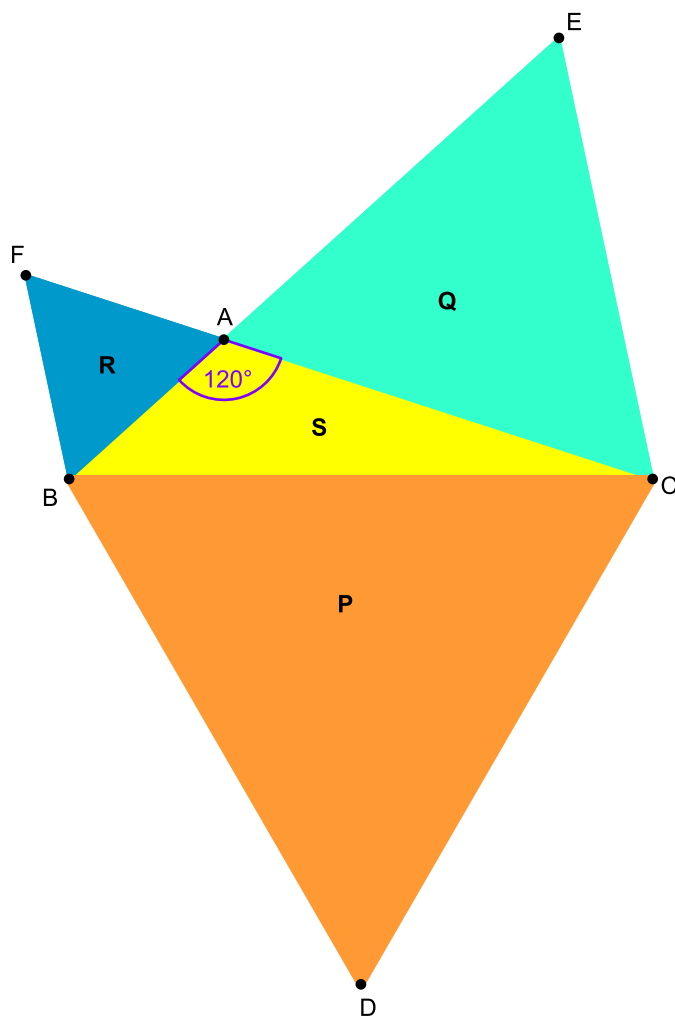
PROBLEMA 778. César Beade Franco(2016):Comunicación personal

Solución: José Montes Valderrama

Maestro del Centro Público de Educación de Adultos «Triana» (Sevilla)

1. Enunciado

Sea el triángulo ABC . Sobre el exterior de sus lados se dibujan los triángulo equiláteros BCD , ACE y ABF de áreas P, Q, R , respectivamente. Sea S el área del triángulo ABC . Probar que $P - S = Q + R$ si y solo si el ángulo BAC mide 120° .



2. $P - S = Q + R \Rightarrow \hat{A} = 120^\circ$

$$P - S = Q + R \Rightarrow \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{ah}{2} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} + \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{despejando } a = \frac{2\sqrt{3}(a^2 - b^2 - c^2)}{2h}$$

elevando al cuadrado los dos miembros, dividiéndolos por a^2 y teniendo en cuenta que la altura de A

$$h = \frac{\sqrt{-a^4 + 2a^2b^2 - b^4 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4}}{2a}$$

$$a^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}(a^2 - b^2 - c^2)}{2h} \right)^2 = \frac{3(a^2 - b^2 - c^2)^2}{4 \frac{-a^4 + 2a^2b^2 - b^4 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4}{4a^2}} \Rightarrow$$

$$\frac{3a^4 - 6a^2b^2 + 3b^4 - 6a^2c^2 + 6b^2c^2 + 3c^4}{-a^4 + 2a^2b^2 - b^4 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4} = 1 \Rightarrow$$

$$3a^4 - 6a^2b^2 + 3b^4 - 6a^2c^2 + 6b^2c^2 + 3c^4 - (-a^4 + 2a^2b^2 - b^4 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4) = 0 \Rightarrow$$

$$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2c^2 + b^2c^2 + c^4 = 0$$

factorizando

$$(a^2 - b^2 - bc - c^2)(a^2 - b^2 + bc - c^2) = 0$$

$$\text{de cuyas soluciones para } P - S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{ah}{2}$$

$$(I) \quad a^2 = b^2 + c^2 + bc \quad \text{y} \quad a = +\sqrt{b^2 + c^2 + bc}$$

$$(II) \quad a^2 = b^2 + c^2 - bc \quad \text{y} \quad a = -\sqrt{b^2 + c^2 + bc}$$

$$\text{solo es aceptable (I) } a^2 = b^2 + c^2 + bc = b^2 + c^2 - 2bc \left(-\frac{1}{2} \right) = b^2 + c^2 - 2bc \cos 120^\circ \Rightarrow \hat{A} = 120^\circ$$

pues la solución (II) es satisfactoria desde el punto de vista algebraico, pero no desde el geométrico al exigir que $a = -\sqrt{b^2 + c^2 + bc}$, no pudiendo ser negativo un lado.

3. $\hat{A} = 120^\circ \Rightarrow P - S = Q + R$

$$\text{Si } \hat{A} = 120 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 120^\circ = b^2 + c^2 + bc$$

$$\text{sustituyendo este valor de } a^2 \text{ en } h, \text{ se tiene que } h = \frac{bc\sqrt{3}}{2a}$$

$$\text{así pues } P - S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - a \frac{\frac{bc\sqrt{3}}{2a}}{2}$$

$$\text{pero } bc = a^2 - b^2 - c^2$$

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{bc\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{(a^2 - b^2 - c^2)\sqrt{3}}{4} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} + \frac{c^2\sqrt{3}}{4} = Q + R$$