

Problema 778

Sea el triángulo $\triangle ABC$. Sobre el exterior de sus lados se dibujan los triángulos equiláteros $\triangle BCD$, $\triangle ACE$, $\triangle ABF$ áreas P , Q , R , respectivamente. Sea S el área del triángulo $\triangle ABC$. Probar que $P - S = Q + R$ si y sólo si el ángulo $A = 120^\circ$.
Beade, C. (2016): Comunicación personal.

Solución de Ricard Peiró i Estruch:

Las áreas de los triángulos equiláteros P ; Q , R son:

$$P = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2, Q = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2, R = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2. \text{ Entonces:}$$

$$a^2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}P, b^2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}Q, c^2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}R.$$

($\Leftarrow$)

Supongamos que $A = 120^\circ$.

Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\triangle ABC$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 120^\circ.$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{3}P = \frac{4\sqrt{3}}{3}Q + \frac{4\sqrt{3}}{3}R - \frac{4\sqrt{3}}{3}\sqrt{QR}. \text{ Simplificando:}$$

$$P - \sqrt{QR} = Q + R.$$

Aplicando la fórmula trigonométrica del área del triángulo $\triangle ABC$:

$$S = \frac{bc \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}\sqrt{QR} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \sqrt{QR}.$$

Entonces, $P - S = Q + R$.

($\Rightarrow$)

Supongamos que $P - S = Q + R$.

Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\triangle ABC$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A.$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{3}P = \frac{4\sqrt{3}}{3}Q + \frac{4\sqrt{3}}{3}R - 2\frac{4\sqrt{3}}{3}\sqrt{QR} \cdot \cos A.$$

$$P = Q + R - 2\sqrt{QR} \cdot \cos A.$$

Aplicando la fórmula trigonométrica del área del triángulo $\triangle ABC$:

$$S = \frac{bc \cdot \sin A}{2} = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}\sqrt{QR} \sin A}{2} \cdot \sqrt{QR} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sin A} S.$$

$$P = Q + R - 2\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sin A} \cdot \cos A \cdot S.$$

$$P - (Q + R) = -\sqrt{3} \frac{\cos A}{\sin A} S = 0. S = -\sqrt{3} \frac{\cos A}{\sin A} S. \text{ tg} A = -\sqrt{3}, \text{ entonces, } A = 120^\circ.$$

