Problema # 778
Propuesto por César Beade Franco,del I. E. S. Fernando Blanco, Cee, A Coruña
Sea el triángulo ABC. Sobre el exterior de sus lados se dibujan los triángulo equiláteros BCD, ACE y ABF de áreas P, Q, R, respectivamente. Sea S el área del triángulo ABC Probar que P - S = Q + R si y sólo si el ángulo BAC mide 120 º.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche

1er cas : $\angle$BAC = 120°
On désigne par a,b et c les longueurs des côtés BC,CA et AB.
La loi des cosinus dans le triangle ABC donne $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc.\cos(\angle BAC) = b^2 + c^2 + bc$
Soit BH la hauteur issue de B dans le triangle ABC. On a $S = bc.\sin(\angle BAC)/2 = bc\sqrt{3}/4$
On en déduit $S = bc\sqrt{3}/4 = (a^2 - b^2 - c^2)\sqrt{3}/4$
Par ailleurs les aires des trois triangles équilatéraux adossés aux côtés du triangle ABC sont respectivement:
$P = a^2\sqrt{3}/4$, $Q = b^2\sqrt{3}/4$ et $R = c^2\sqrt{3}/4$
En rapprochant ces trois égalités de l'équation donnant S,on obtient P – S = Q + R.

2ème cas : P – S = Q + R.
Par hypothèse on a $S = P - Q - R = (a^2 - b^2 - c^2)\sqrt{3}/4$
Or $S = bc.\sin(\angle BAC)/2$ .D'où $bc = 2S/\sin(\angle BAC)$.
Par ailleurs $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos(\angle BAC)$. D'où $S = (b^2 + c^2 - a^2)\tan(\angle BAC)/4$
En rapprochant les deux relations qui donnent S, on obtient:
$\tan(\angle BAC) = -\sqrt{3}$, soit $\angle BAC = 120°$