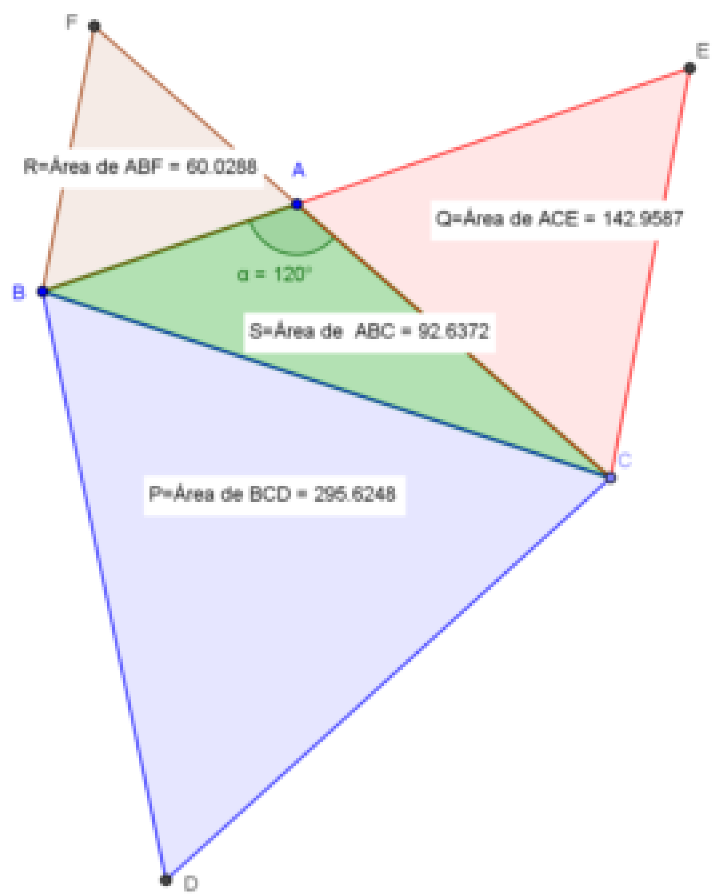
Problema *778.- Sea el triángulo ABC. Sobre el exterior de sus lados se dibujan los triángulos equiláteros BCD, ACE y ABF de áreas P, Q, R, respectivamente. Sea S el área del triángulo ABC. Probar que $P - S = Q + R$ si y sólo si el ángulo BAC mide* 120°.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



El área de un triángulo equilátero es $\Delta = l^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$. Aplicándola, tendremos para la suma de las de los triángulos exteriores opuestos a B y C: $Q + R = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (b^2 + c^2)$, y a A: $P = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$.

El área del triángulo ABC se puede expresar como $S = \frac{1}{2} bc \cdot \operatorname{sen} A = \frac{1}{4}(b^2 + c^2 - a^2) \cdot \tan A$, utilizando el teorema del coseno.

Con todo esto se tiene ahora:

$$Q + R + S - P = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (b^2 + c^2 - a^2) + \frac{1}{4} \cdot (b^2 + c^2 - a^2) \cdot \tan A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4}\left(\sqrt{3} + \tan A\right)$$

De donde se concluye que el valor de $Q + R + S - P$ es cero si y sólo si $A° = 120$

∎