# Pr. Cabri 779

## Enunciado

¿Existe un triángulo escaleno tal que la altura de un vértice, la mediana de un segundo vértice y la bisectriz del tercero sean iguales?

## Solución de César Beade Franco

Tomemos como vértices A(0,0), B(1,0) y C(x,y) y trazamos desde A una bisectriz, desde B una mediana y desde C una altura.
Los puntos e corte con los lados opuestos (trazas) son, repectivamente, $A'\left(\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$, $B'\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$ y $C'(x,0)$

Basta resolver el sistema formado por el par de ecuaciones AA'=CC' y BB'=CC'. Ésto equivale a calcular los puntos comunes a dos lugares geométricos. Si fijamos dos vértices A y B, un lugar es el que describe un punto C tal que la bisectriz desde A y la altura desde C son iguales, y en el otro son iguales la mediana desde B y la altura desde C.
En nuestro caso, los anteriores lugares tienen como ecuaciones respectivas

$$\frac{2\left(x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} == y^2, \quad \frac{1}{4}\left(4-4x+x^2+y^2\right) == y^2$$

Que nos da 2 soluciones (4, considerando las simetrías), una, el triángulo equilátero, evidente. Estas soluciones son
$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y (4.86052, 1.65152)

Out[494]=