

Problema 779 de triángulos cabri. ¿Existe un triángulo escaleno tal que la altura desde un vértice, la bisectriz desde otro vértice y la mediana desde el tercer vértice sean iguales?

Propuesto por Philippe Fondanaiche.

Solución de *Francisco Javier García Capitán*. Fijemos los vértices B y C y busquemos los triángulos ABC para los que $h_B = m_C$. Teniendo en cuenta que

$$h_B^2 = m_C^2 \Leftrightarrow \frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)}{4b^2} = \frac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{4},$$

obtenemos la relación

$$(1) \quad a^4 - 2a^2c^2 + 3b^4 - 3b^2c^2 + c^4 = 0.$$

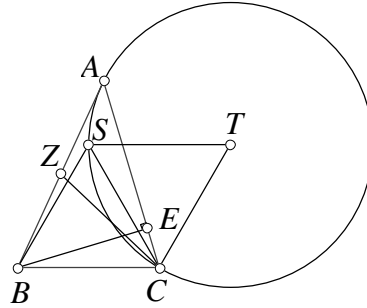
Asignando coordenadas de forma que $B = (0, 0)$, $C = (a, 0)$ y $A = (x, y)$, la relación (1) se expresa

$$4a^4 - 12a^3x + 13a^2x^2 - 6ax^3 + x^4 + a^2y^2 - 6axy^2 + 2x^2y^2 + y^4 = 0,$$

y que puede factorizarse en la forma

$$(-2a^2 + 3ax - x^2 + \sqrt{3}ay - y^2)(2a^2 - 3ax + x^2 + \sqrt{3}ay + y^2) = 0,$$

por lo que el lugar de A está compuesto por dos circunferencias de radio a con centros en los puntos $\left(\frac{3a}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$. Entonces tenemos la siguiente construcción:

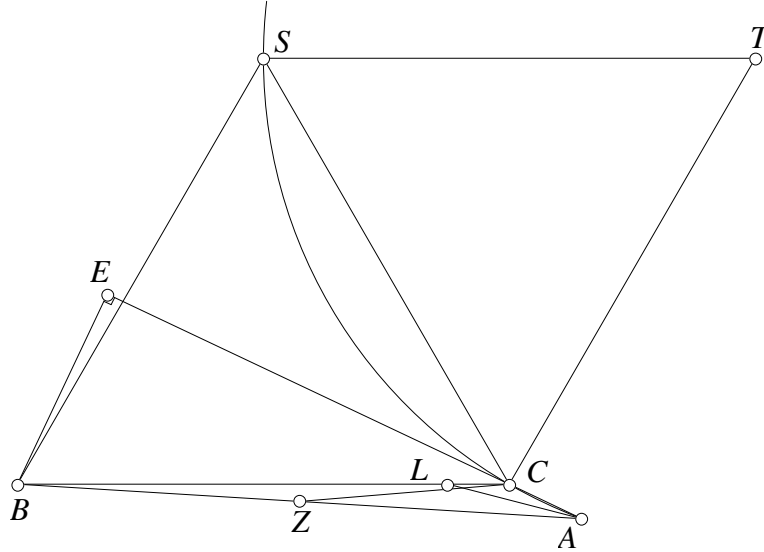


Fijados B y C , construimos el triángulo equilátero SBC sobre BC y completamos el paralelogramo $STCB$. La circunferencia con centro T y radio $TS = TC = BC$ contiene los puntos A para los que el triángulo ABC cumple $h_B = m_C$.

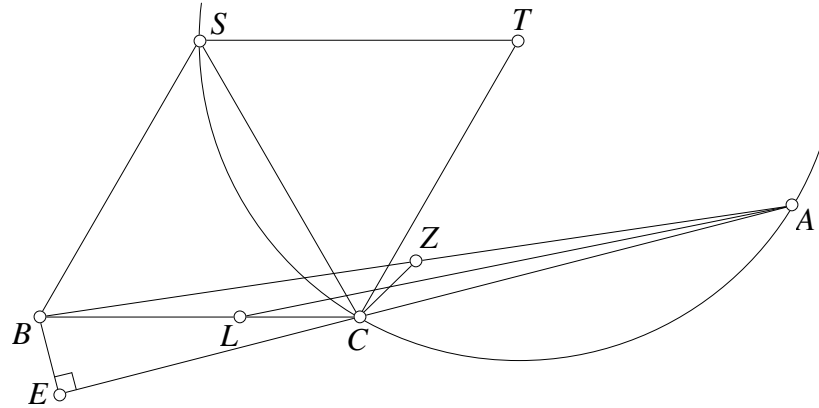
Buscamos un triángulo en el que se cumpla $w_A = h_B = m_C$. Queremos que la bisectriz AL , la altura BE y la mediana CZ tengan la misma longitud.

Fijados B y C como antes, consideremos un punto A sobre la circunferencia de centro T y radio $TS = BC$ de manera que A está muy próximo a C y por el lado de BC opuesto a T . Como la bisectriz AL cumple que $BL : LC = BA : AC$, L estará muy próximo a C y AL

será muy pequeño comparado con las longitudes iguales BE y CZ , como se muestra en la figura siguiente:



Sin embargo, al considerar puntos A sobre la misma circunferencia con centro T , pero más alejado de C , la bisectriz AL es claramente mayor que las distancias BE y CZ :



Por razones de continuidad, *habrá algún punto intermedio donde las tres longitudes sean iguales*.

Para localizar más exactamente este punto, hacemos lo siguiente:

Podemos comprobar que la igualdad $w_A = h_B$ conduce a la relación

$$(2) \quad -a^2b^2 + b^4 - 2a^2bc + 4b^3c - a^2c^2 - 2b^2c^2 + c^4 = 0,$$

mientras que la igualdad $w_A = m_C$ conduce a la relación

$$(3) \quad -2a^2b^2 - 2b^4 - 8a^2bc - 2a^2c^2 + 7b^2c^2 + 6bc^3 + c^4 = 0.$$

Hemos visto que, fijados los vértices B y C , la relación (1) la cumplen los puntos A que están sobre dos circunferencias. De igual forma, podemos comprobar que las relaciones (2) y (3) corresponden a sendas curvas cuyos puntos comunes, si los hay, también estarán sobre las dos circunferencias que componen (1).

En la figura siguiente, la curva verde corresponde a la relación (2) y la naranja a la relación (3). Vemos que hay dos puntos comunes a (1), (2) y (3) que corresponden a una solución distinta del equilátero:

