

Problème # 779

¿Existe un triángulo escaleno tal que la altura de un vértice, la mediana de un segundo vértice y la bisectriz del tercero sean iguales?
Concurso Shariguin (2011), problema 19

Solution proposée par Philippe Fondanaiche

Réponse: oui, il existe un tel triangle.

Démonstration

Soit M le milieu de AB , CM est la médiane. La hauteur issue de A rencontre la droite BC au point H . La bissectrice de l'angle $\angle ABC$ rencontre le côté AC au point E .

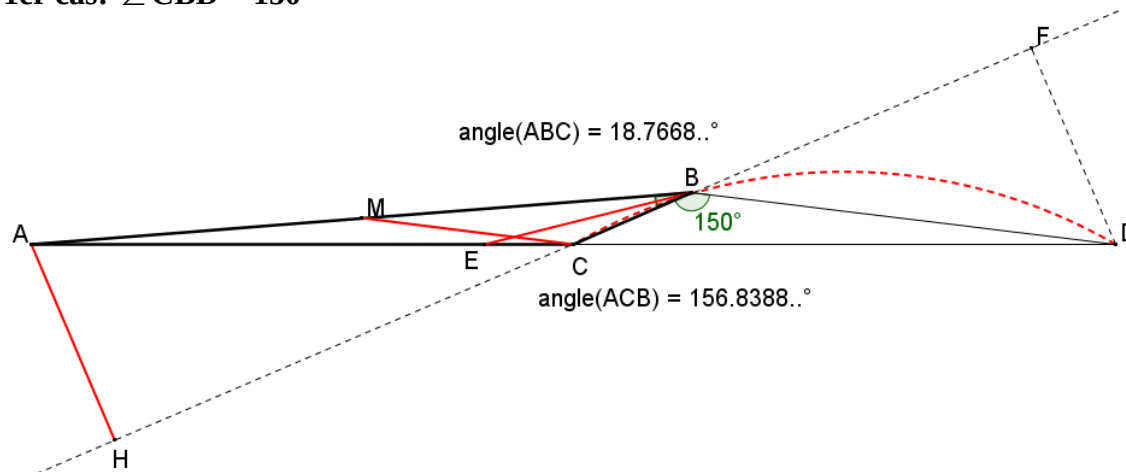
Soient D le point symétrique de A par rapport à C sur la droite AC et F la projection de D sur la droite BC . Par construction on a $AH = DF$.

Par hypothèse $AH = CM$. Comme C et M sont les milieux de AD et AB , $CM = BD/2$. D'où $DF = BD/2$.

Le triangle DBF est un demi-triangle équilatéral et $\angle DBF = 30^\circ$

On a alors deux cas de figure:

1er cas: $\angle CBD = 150^\circ$



Le point B se trouve sur l'arc de cercle (CD) en pointillés rouges tel que $\angle CBD = 150^\circ$.

Quand B tend vers C , la longueur de la bissectrice BE tend vers 0 tandis que la longueur de la médiane CM tend vers la demi-longueur du côté AC . On a alors $CM > BE$.

Quand B tend vers D, la longueur de la bissectrice tend vers la demi-longueur du segment AD tandis que la longueur de la médiane tend vers 0. On a alors $CM < BE$.

Comme les longueurs de BE et de CM varient continûment entre leurs valeurs extrêmes, il existe donc un point B de l'arc (CD) tel que $BE = CM$. Avec le logiciel Geogebra, on vérifie que les trois segments AH, BE et CM sont égaux avec les angles $\angle ABC = 18,7668..^\circ$ et $\angle ACB = 156.8388..^\circ$. Cqfd

Nota: le calcul des côtés a,b,c du triangle ABC en fonction de la longueur commune l de AH, BE et CM fait intervenir des polynômes de degré > 2 . Le point B ne peut donc pas être construit à la règle et au compas

2ème cas : $\angle CBD = 30^\circ$

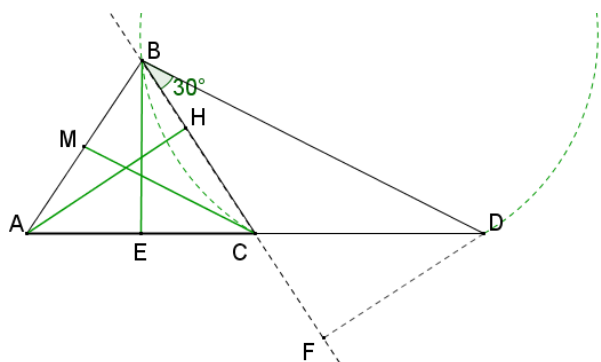


figure n°1

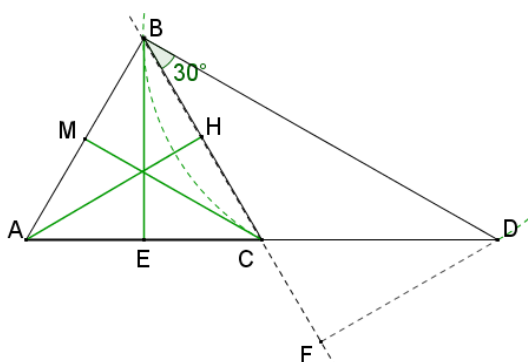


figure n°2

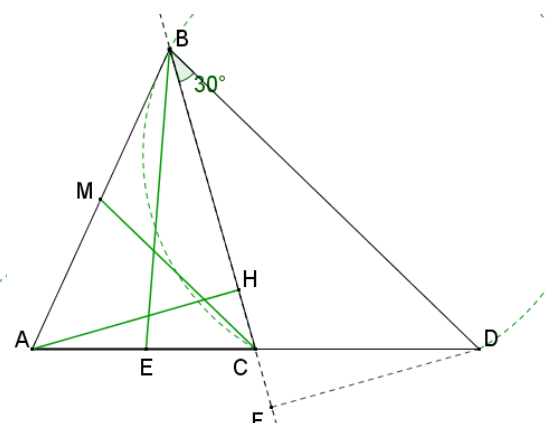


figure n°3

Le point B se trouve sur l'arc de cercle (CD) en pointillés verts tel que $\angle CBD = 30^\circ$.

Sur la figure n°2, quand $\angle ABC = 60^\circ$, les trois segments AC, BE et CM sont bien égaux mais le triangle ABC est équilatéral en contradiction avec l'hypothèse selon laquelle le triangle ABC est scalène.

Sur la figure n°1 avec $\angle ABC > 60^\circ$, on a toujours $BE < AH = CM$ et sur la figure n°3 avec $\angle ABC < 60^\circ$, on a toujours $BE > AH = CM$.

Conclusion: pas de solution.