

Problema 780

Sea A' , (respectivamente B' , C') los pies de las alturas desde el vértice A (respectivamente B , C) en un triángulo ABC . Sea H su ortocentro y sea M un punto arbitrario del plano. Demostrar que las seis cónicas que continenen a los puntos $MABA'B'$, $MBCB'C'$, $MCAC'A'$, $MHCA'B'$, $MHAB'C'$ y $MHBC'A'$ tienen en común otro punto además de M .

Dou, J. (1986): Problema E3172. American Mathematical Monthly (Vol 93, nº 9, Nov. pg 733)

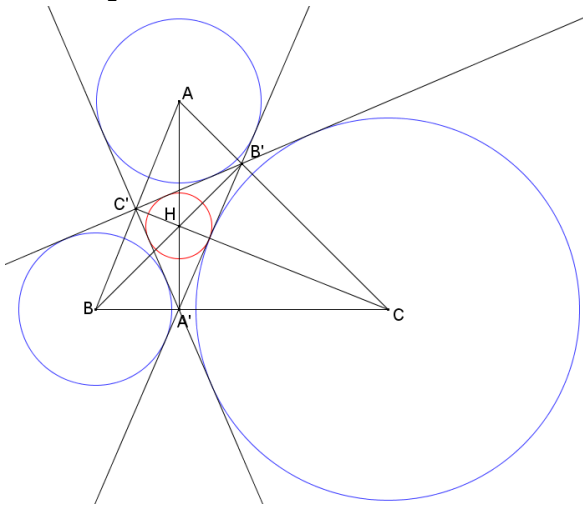
Solution proposée par Philippe Fondanaiche

Ce problème est un cas particulier d'un **problème plus général** qui s'énonce comme suit :

Soit un point P intérieur à un triangle ABC . Les céviennes issues des sommets du triangle et passant par P rencontrent les côtés opposés aux points A' , B' et C' . Soit un point M arbitraire du plan distinct des sept points précédemment désignés. Les six coniques qui contiennent respectivement les points M, A, B, A', B' , (M, B, C, B', C') , (M, C, A, C', A') , (M, C, A', B', P) , (M, A, B', C', P) et (M, B, C', A', P) se rencontrent en un deuxième point N autre que le point M (propriété $(\mathcal{P})$)

Nous allons traiter successivement les trois cas particuliers où P est respectivement l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle inscrit du triangle ABC avant de traiter le cas général.

1er cas particulier: P est l'orthocentre H du triangle ABC



Lemme: Dans un triangle ABC admettant le point H pour orthocentre et les points A' , B' et C' pour pieds des hauteurs issues de A , B et C sur les côtés BC , CA et AB , le point H est le centre du cercle inscrit du triangle $A'B'C'$ et les points A , B , C sont les centres des cercles exinscrits de ce même triangle.

On démontre aisément avec des relations d'angles que les hauteurs et les côtés du triangle ABC sont respectivement les bissectrices intérieures et les bissectrices extérieures du triangle $A'B'C'$ appelé triangle orthique.

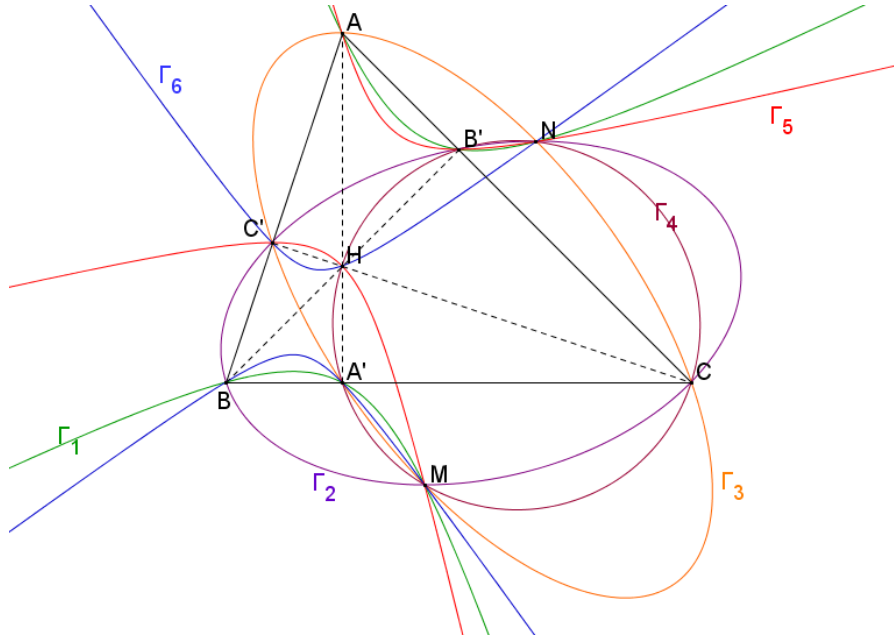
Voir http://debart.pagesperso-orange.fr/geoplan/triangle_orthique.html

Pour déterminer les équations des six coniques, on introduit [les coordonnées trilineaires](#) en prenant le triangle A'B'C' pour [triangle de référence](#) avec les coordonnées de A' = (1,0,0), B' = (0,1,0) et C'(0,0,1).

D'après le lemme, on obtient immédiatement les coordonnées de H = (1,1,1), de A = (-1,1,1), de B = (1,-1,1) et de C = (1,1,-1).

On désigne par (α, β, γ) les coordonnées du point arbitraire M du plan. On suppose que M n'est jamais placé sur l'une quelconque des droites qui portent les côtés du triangle ABC. Les trois coordonnées de M sont $\neq 0$.

Par rapport au triangle de référence A'B'C', toute conique du plan a une équation de la forme $ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fzx = 0$.



Soit Γ_1 la conique passant par les cinq points M, A, B, A' et B' (voir l'hyperbole dans la figure supra). Les coefficients a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 et f_1 de son équation sont tels que:

- la conique passe par A $\implies a_1 + b_1 + c_1 - d_1 + e_1 - f_1 = 0$
- la conique passe par B $\implies a_1 + b_1 + c_1 - d_1 - e_1 + f_1 = 0$
- la conique passe par A' $\implies a_1 = 0$
- la conique passe par B' $\implies b_1 = 0$
- la conique passe par M $\implies a_1\alpha^2 + b_1\beta^2 + c_1\gamma^2 + d_1\alpha\beta + e_1\beta\gamma + f_1\gamma\alpha = 0$ (E₁)

Il en résulte que $a_1 = 0, b_1 = 0, c_1 = d_1, e_1 = f_1$ et l'équation (E₁) s'écrit $d_1(\gamma^2 + \alpha\beta) + e_1(\alpha\gamma + \beta\gamma) = 0$. Au moins l'un des deux coefficients d_1 et e_1 est non nul. Supposons sans perte de généralité $e_1 \neq 0$. En posant $k_1 = d_1/e_1$, ce coefficient se calcule en fonction de α, β et γ et l'équation de Γ_1 est alors : $k_1z^2 + k_1xy + yz + zx = 0$

Soit N le point du plan de coordonnées $(1/\alpha, 1/\beta, 1/\gamma)$ qui est le [conjugué isogonal](#) de M par rapport au triangle A'B'C'.

La conique Γ_1 passe par ce point N. En effet le premier membre de l'équation de Γ_1 s'écrit $k_1/\gamma^2 + k_1/\alpha\beta + 1/\alpha\gamma + 1/\beta\gamma = [k_1(\alpha\beta + \gamma^2) + \beta\gamma + \alpha\gamma]/\alpha\beta\gamma^2$ qui s'annule d'après (E₁).

Les équations des cinq autres coniques $\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$ et Γ_6 , sont de la même forme que celle de Γ_1 et le point N appartient également à chacune d'elles.

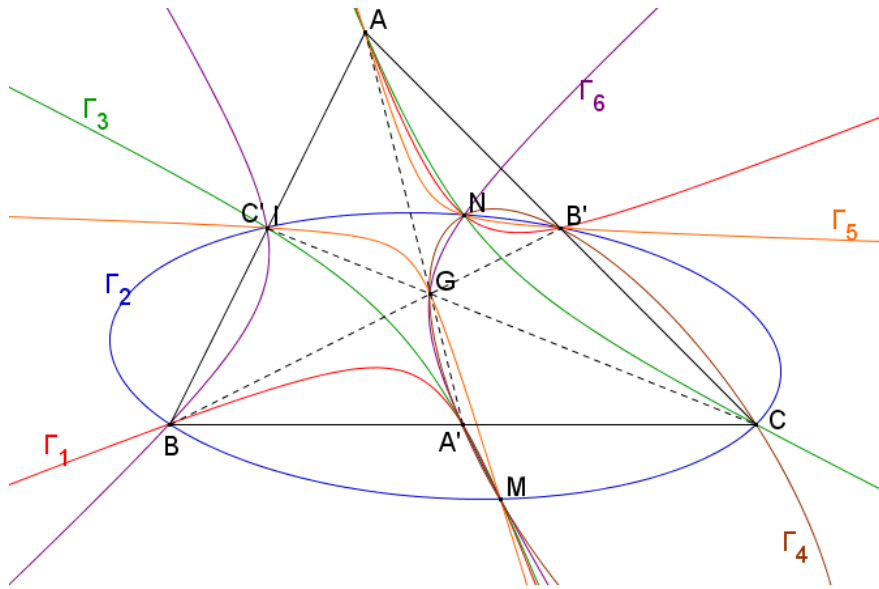
Prenons par exemple la conique Γ_5 qui passe par les points M, H, A, B' et C' (voir l'hyperbole dans la figure supra). Les coefficients a_5, b_5, c_5, d_5, e_5 et f_5 de son équation sont tels que:

- la conique passe par H $\implies a_5 + b_5 + c_5 + d_5 + e_5 + f_5 = 0$
- la conique passe par A $\implies a_5 + b_5 + c_5 - d_5 + e_5 - f_5 = 0$
- la conique passe par B' $\implies b_5 = 0$
- la conique passe par C' $\implies c_5 = 0$
- la conique passe par M $\implies a_5\alpha^2 + b_5\beta^2 + c_5\gamma^2 + d_5\alpha\beta + e_5\beta\gamma + f_5\gamma\alpha = 0$ (E₅)

On obtient $b_5 = 0, c_5 = 0, a_5 = -e_5, d_5 = -f_5$. En posant $k_5 = d_5/e_5$ avec $e_5 \neq 0$, l'équation de Γ_5 est $-x^2 + k_5xy + yz - k_5zx = 0$ et l'on vérifie que le point N appartient bien à Γ_5 .

Conclusion: le point M et son conjugué isogonal N par rapport au triangle orthique du triangle ABC sont communs aux six coniques.

2ème cas particulier: P est le centre de gravité G du triangle ABC

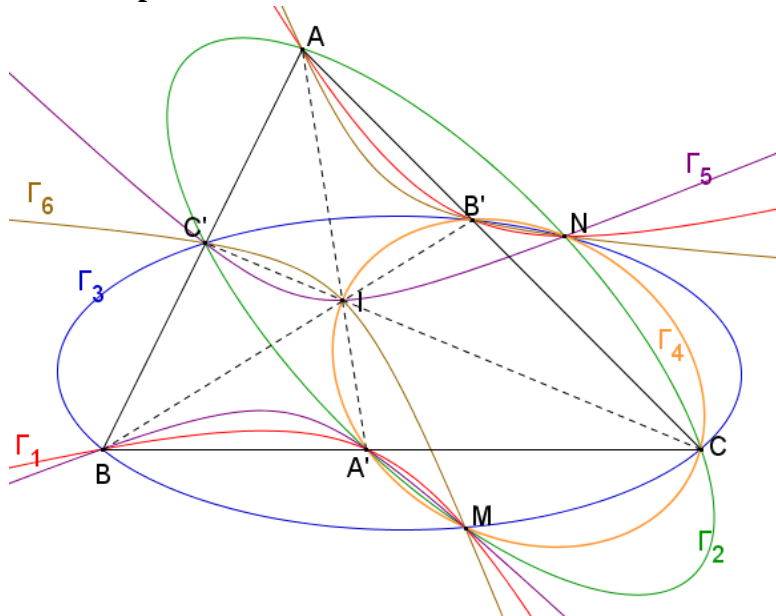


Le triangle A'B'C' étant pris comme triangle de référence, les coordonnées barycentriques de ses sommets sont respectivement A'(1,0,0), B'(0,1,0) et C'(0,0,1). Comme G centre de gravité du triangle ABC est aussi centre de gravité du triangle A'B'C', ses coordonnées barycentriques sont (1,1,1). Les coordonnées barycentriques de A, B et C se calculent alors aisément : $(-1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$ et $(1, 1, -1)$. Les coordonnées barycentriques des points A, B, C, A', B', C', G sont ainsi identiques aux coordonnées trilinéaires des points A, B, C, A', B', C', H.

Toute conique du plan ayant une équation de la forme $ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fzx = 0$, il en résulte qu'on obtient les mêmes équations que dans le premier cas pour déterminer les coordonnées du point N commun aux six coniques.

Conclusion: le point M ayant pour coordonnées barycentriques (α, β, γ) , les six coniques passent par un deuxième point N qui a pour coordonnées barycentriques : $(1/\alpha, 1/\beta, 1/\gamma)$.

3ème cas particulier: P est le centre du cercle inscrit I du triangle ABC



Le triangle ABC étant pris comme triangle de référence, les coordonnées barycentriques de ses sommets sont respectivement A(1,0,0), B(0,1,0) et C(0,0,1). Comme I centre du cercle inscrit du triangle ABC est à égale distance des trois côtés du triangle, les coordonnées barycentriques de ce point sont (1,1,1). On en déduit celles de A' (0,1,1), de B'(1,0,1) et de C'(1,1,0).

A partir de l'équation générale d'une conique $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2ezy + 2fzx = 0$, on détermine les équations des six coniques qui passent par le point M de coordonnées (α, β, γ) et l'on obtient:

$$\Gamma_1 : z^2 + k_1xy - yz - zx = 0 \text{ avec } k_1 = \gamma(\alpha + \beta - \gamma) / \alpha\beta$$

$$\Gamma_2 : y^2 - xy - yz + k_2zx = 0 \text{ avec } k_2 = \beta(\alpha - \beta + \gamma) / \gamma\alpha$$

$$\Gamma_3 : x^2 - xy + k_3yz - zx = 0 \text{ avec } k_3 = \alpha(-\alpha + \beta + \gamma) / \beta\gamma$$

$$\Gamma_4 : x^2 + k_4y^2 - k_4yz - zx = 0 \text{ avec } k_4 = \alpha(\alpha - \gamma) / \beta(\gamma - \beta)$$

$$\Gamma_5 : k_5x^2 + z^2 - k_5xy - yz = 0 \text{ avec } k_5 = \gamma(\gamma - \beta) / \alpha(\beta - \alpha)$$

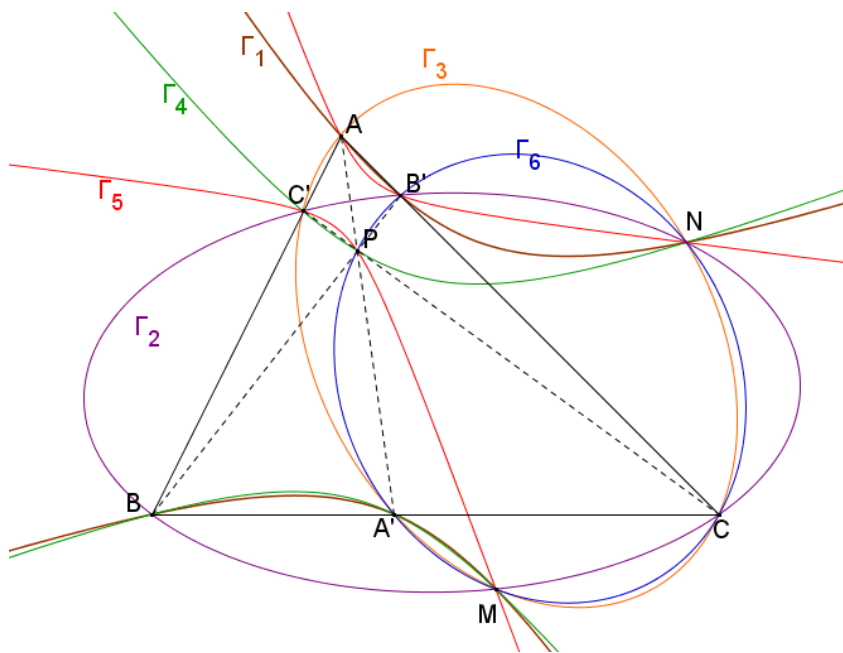
$$\Gamma_6 : y^2 + k_6z^2 - xy - k_6zx = 0 \text{ avec } k_6 = \beta(\beta - \alpha) / \gamma(\alpha - \gamma)$$

On vérifie que le point N de coordonnées barycentriques

$\alpha(-\alpha + \beta + \gamma)$, $\beta(-\beta + \gamma + \alpha)$ et $\gamma(-\gamma + \alpha + \beta)$ appartient bien à ces six coniques.

Cas général

Ci-après l'illustration de la propriété ($\mathcal{P}$) avec trois céviennes AA' , BB' et CC' qui se croisent en un point quelconque P intérieur au triangle.



Il est bien connu qu'une cubique ($\mathcal{C}$) est déterminée par neuf points du plan. En effet c'est une combinaison linéaire de 10 monômes de degré 3: x^3 , y^3 , z^3 , x^2y , x^2z , y^2x , y^2z , z^2x , z^2y et xyz . Donc les courbes cubiques forment un espace projectif de dimension 9.

Si l'on considère seulement huit points, par exemple les points A, B, C, A', B', C', P et M de l'énoncé, le [théorème de Cayley-Bacharach](#) (voir annexe) précise que le faisceau de cubiques qui passent par ces huit points passe également par un neuvième point. On désigne ce point par N .

L'appartenance du point N à la cubique ($\mathcal{C}$) reste vraie si la cubique est dégénérée en l'une des six droites $(BC), (CA), (AB), (AA'), (BB')$ et (CC') avec la conique associée à chacune d'elles de sorte que M et N sont les points communs à ces six coniques.

Par exemple si la cubique ($\mathcal{C}$) se décompose en la droite (CC') qui contient le point P , la conique correspondante passe par les points M, A, A', B, B', N . Si la cubique ($\mathcal{C}$) se décompose en la droite (BC) qui contient le point A' , la conique correspondante passe par les points M, A, B', C', P, N . etc...

Annexe: théorème de Cayley-Bacharach

Theorem. *Let C_1 and C_2 be two cubics which intersect in exactly nine points. Suppose C is a third cubic which passes through eight of these nine points. Then, C also passes through the ninth point.*

Proof. The general equation for a cubic is:

$$P(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + ex^2 + fxy + gy^2 + hx + iy + j = 0.$$

A cubic is determined by the ten coefficients $a, b, c, d, e, f, g, h, i$, and j . Since we can multiply the entire equation through by a scalar and still get the same curve, the set of all possible cubics is a nine-dimensional vector space. When we restrict the set of all cubics to the set of cubics which pass through a particular point, we impose one linear condition on the ten coefficients, and we restrict the set of cubics by one dimension. Consequently, given eight sufficiently general points, there is a one-dimensional family of cubics which pass through them. Since the nine points under consideration are the intersection of two cubics, it is an immediate consequence of Bezout's Theorem that no four of them are collinear and no conic can be drawn which contains seven of them. It can also be shown that under these conditions, the points meet the requirements of being sufficiently general.

The set of all cubics is nine-dimensional, and the set of cubics passing through these eight given points is one-dimensional. Hence, we can think of this subset of the cubics as a line in $\mathbb{R}^9$. If this line passes through the origin, then it is a one-dimensional vector space, and is spanned by any of its elements. If this line does not pass through the origin, then there exists a plane in $\mathbb{R}^9$ which contains both this line and the origin. This plane is a two-dimensional vector space, and is consequently spanned by any two linearly-independent elements of the space. Since the line lies in the plane, any element of the line can also be written as a linear combination of these two elements. Since the line does not pass through the origin, any two distinct elements of the line are linearly independent, and so span the line. In either case, given two distinct elements on the line, any point on the line can be written as a linear combination of these two elements.

Let $P_1(x, y) = 0$ and $P_2(x, y) = 0$ be the defining cubic equations for C_1 and C_2 . Since C_1 and C_2 are distinct curves, from the above argument, the entire family of cubics passing through the eight points consists of cubic equations which are linear combinations of P_1 and P_2 . Thus, the cubic C has the equation $P(x, y) = \lambda_1 P_1(x, y) + \lambda_2 P_2(x, y) = 0$ for some λ_1 and λ_2 .

At the ninth point of intersection of C_1 and C_2 , $P_1(x, y) = 0$ and $P_2(x, y) = 0$, and so $P(x, y) = 0$ at that point as well. Since $P(x, y)$ vanishes there, we also have that C contains that point.

—