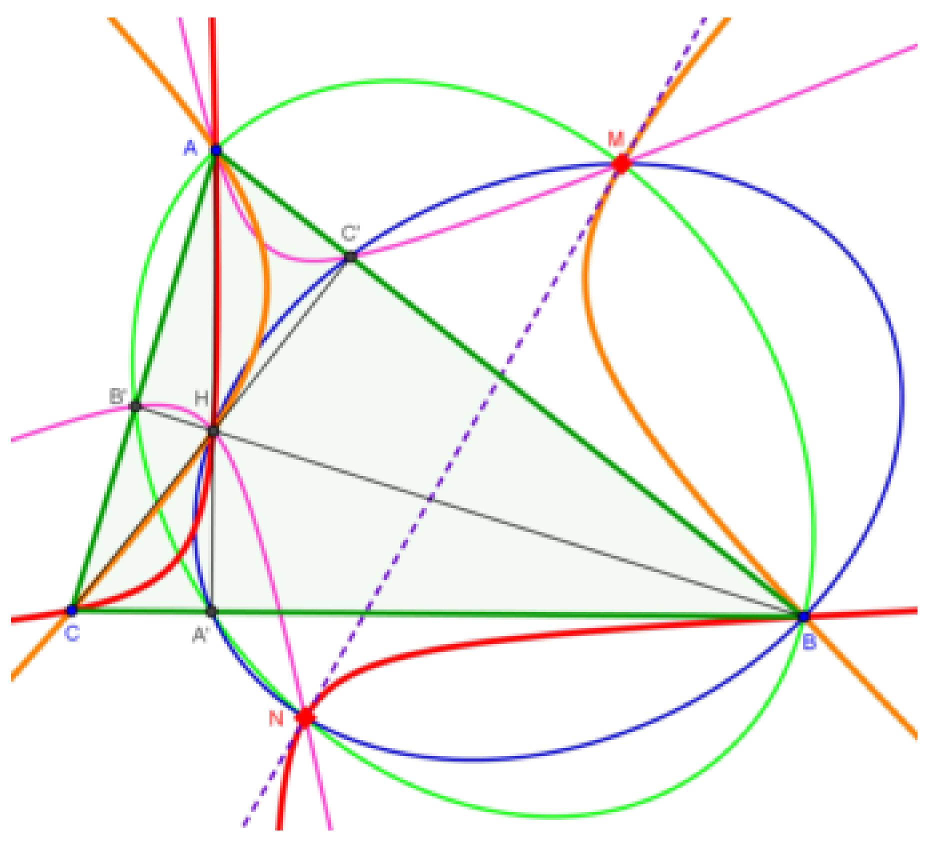
Quincena del 16 al 30 de junio de 2016.

Problema 780. *- Sea A', (respectivamente B', C') el pie de la altura desde el vértice A (respectivamente B, C) en un triángulo ABC. Sea H su ortocentro y sea M un punto arbitrario del plano. Demostrar que las seis cónicas que contienen a los puntos* $MABA'B'$, $MBCB'C'$, $MHCA'B'$, $MHAB'C'$ *y* $MHBC'A'$ *tienen en común otro punto además de M.*

Dou, J. (1986): Problema E3172. American Mathematical Monthly (Vol 93, nº 9, Nº. pg 733)



Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Observando la figura, se me ocurrió dibujar la cónica definida por los tres vértices, el ortocentro y el punto M (la de color naranja), junto con las otras cónicas del problema (aquí solamente hay tres). Comprobé la veracidad del problema y se me ocurrió trazar la recta MN. Me sorprendió ver que se trataba de la tangente en M a la séptima cónica añadida.

Además el resultado se mantenía si en vez del ortocentro se tomaba otro punto arbitrario.

Después sustituí M por N y pude ver que la recta MN era tangente a esta octava cónica (en color rojo). Es decir, el proceso de construir N a partir de M es involutivo.

Así pues, el problema de hallar los puntos comunes a varias cónicas se transformó en el de hallar los puntos comunes (M y N) a una cónica y una recta. Para ello se me ocurrió utilizar coordenadas proyectivas, donde H es un punto arbitrario de modo que no esté sobre ningún lado del triángulo. En esta referencia $\mathcal{R} = \{A, B, C; H\}$, tenemos $M = (u : v : w)$.

Ahora vamos a encontrar las ecuaciones de las seis cónicas del problema y la de la la circunscrita al cuadrivértice y que pasa por M.

Comencemos por esta última. La ecuación de las cónicas que pasan por los cuatro puntos del sistema de referencia es de la forma $\alpha yz + \beta zx = (\alpha + \beta)xy$. Obligándole ahora a pasar por el punto M, obtenemos la siguiente ecuación

$$\Gamma\colon \left(\frac{1}{w} - \frac{1}{v}\right)yz + \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{w}\right)zx + \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{u}\right)xy = 0$$

La polar de esta cónica en el punto M es la tangente en ese punto, se obtiene fácilmente:

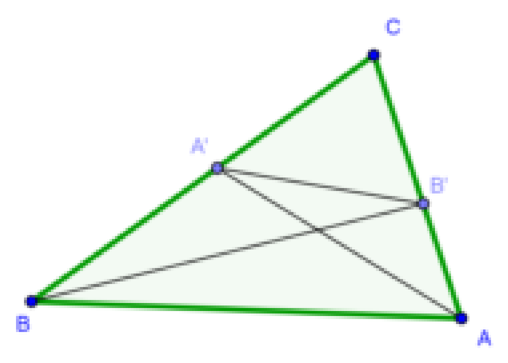
Escribimos la matriz de la cónica y la aplicamos a M. Obtenemos los coeficientes de la recta que contiene al punto N, que es común a las seis cónicas y es el objetivo del problema.

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{v} - \frac{1}{u} & \frac{1}{u} - \frac{1}{w} \\ \frac{1}{v} - \frac{1}{u} & 0 & \frac{1}{w} - \frac{1}{v} \\ \frac{1}{u} - \frac{1}{w} & \frac{1}{w} - \frac{1}{v} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{w-v}{u} \\ \frac{u-w}{v} \\ \frac{v-u}{w} \end{pmatrix}$$

La ecuación de la tangente en M es

$$m\colon \frac{w-v}{u}x + \frac{u-w}{v}y + \frac{v-u}{w}z = 0$$

Las ecuaciones de las otras seis cónicas se van a detallar a continuación.



Para la definida por los puntos $ABA'B'M$, tenemos el haz que pasa por los cuatro primeros, tomamos un par de rectas $AB\colon z = 0$ y $A'B'\colon z = x + y$ por un lado y $AB'\colon y = 0$ y $BA'\colon x = 0$ de otro. Con ellas formamos la ecuación de todas las que pasan por esos cuatro puntos

$$(x + y - z)z + \lambda xy = 0$$

Y ahora al hacer que pase por M obtenemos

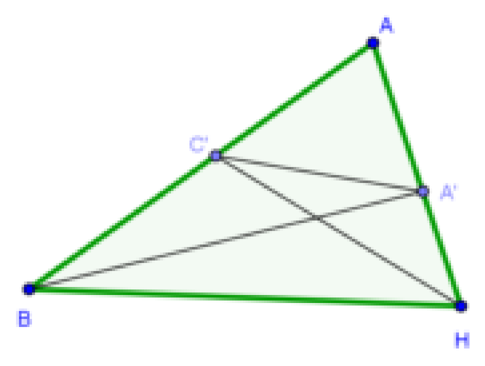
$$\Gamma_1\colon uvz(x + y - z) - xyw(u + v - w) = 0.$$

De modo análogo, sin más que cambiar B por C en la anterior, (y también y por z; v por w) obtenemos la ecuación de la cónica que pasa por $ACA'C'M$

$$\Gamma_2\colon uwy(x - y + z) - xzv(u - v + w) = 0$$

Con igual método se obtiene la que pasa por $BCB'C'M$

$$\Gamma_3\colon vwx(-x + y + z) - yzu(-u + v + w) = 0$$



Para la cónica que pasa por $MBHA'C'$, observando la figura, tomamos los pares de rectas $BH\colon x = z$ y $A'C'\colon y = x + z$ primero y $C'B\colon z = 0$ y $A'H\colon y = z$ después. Con estas cuatro compongo la ecuación del haz de las que pasan por esos cuatro puntos. Después imponemos la condición de pasar por M y de ese modo conseguimos

$$\Gamma_4\colon w(v - w)(x - z)(x - y + z) - z(y - z)(u - w)(u - v + w) = 0$$

Igual que antes, cambiando B por C en la anterior, (y también y por z, v por w) obtenemos la ecuación de la cónica que pasa por $MCHA'B'$, se trata de la cónica

$$\Gamma_5\colon v(w - v)(x - y)(x + y - z) - y(z - y)(u - v)(u + v - w) = 0$$

Finalmente para la cónica que pasa por $MAHB'C'$ tenemos (cambiando B por A en la primera)

$$\Gamma_6\colon w(u - w)(y - z)(-x + y + z) - z(x - z)(v - w)(-u + v + w) = 0$$

La intersección de la cónica

$$\Gamma_1\colon uvz(x + y - z) - xyw(u + v - w) = 0.$$

con

$$m\colon \frac{w-v}{u}x + \frac{u-w}{v}y + \frac{v-u}{w}z = 0$$

nos da, (resolviendo con muchísima paciencia) además del punto $M = (u : v : w)$, el punto

$$N = (u(-u + v + w) : v(u - v + w) : w(u + v - w))$$

que veremos que también está en las otras cónicas.

Con un programa del tipo de *Derive* es fácil comprobar que este punto también está en las cinco cónicas restantes.

De todos modos, para quien desee ver un poco más los cálculos, usando una notación tomada del semiperímetro del triángulo, llamando $2s = u + v + w$ (**NO CONFUNDIR s CON SEMIPERÍMETRO**), las coordenadas de N se pueden poner como

$$N = \big(2u(s - u) : 2v(s - v) : 2w(s - w)\big) = (n_x : n_y : n_z).$$

Al sustituir x, y, z por las correspondientes coordenadas de N se tienen expresiones como

$$x - y + z = (-u + v + w)(u + v - w) = \tfrac{n_x n_z}{uw};\ \text{y}\ x - z = (u - w)(v - u - w) = \tfrac{w-u}{v} \cdot n_y$$

y con permutaciones se obtienen todas las expresiones necesarias que permiten comprobar que N es un punto de las seis cónicas.

También sirven esas expresiones para comprobar que el punto asociado a N es este proceso es M, esto es, el punto cuyas coordenadas son

$$\big(n_x(-n_x + n_y + n_z) : n_y(n_x - n_y + n_z) : n_z(n_x + n_y - n_z)\big)$$

es otra vez el punto M. (Basta ver que, por ejemplo $n_y(n_x - n_y + n_z) = v \cdot \frac{n_x n_y n_z}{uvw}$).

Un caso particular

Para concluir veremos qué ocurre en un caso muy particular. Se trata de aquél en el que M es el baricentro del triángulo y H el ortocentro. Aquí usaremos coordenadas baricéntricas.

La cónica Γ, circunscrita al triángulo y que pasa por el ortocentro y el baricentro, es una hipérbola equilátera, cuyo centro está en la circunferencia de los nueve puntos, conocida como hipérbola de Kiepert que tiene la propiedad de ser el lugar geométrico de los puntos cuyas polares respecto del triángulo (llamadas también *trilineales*) son perpendiculares a la recta de Euler.

La ecuación de esta hipérbola (en baricéntricas) es

$$\Gamma\colon (b^2 - c^2)yz + (c^2 - a^2)zx + (a^2 - b^2)xy = 0$$

La ecuación de la tangente en G es

$$m\colon (b^2 - c^2)x + (c^2 - a^2)y + (a^2 - b^2)z = 0$$

El conjugado isotómico de esta recta es, precisamente, la propia hipérbola de Kiepert.

(El conjugado isotómico de un punto $P(p : q : r)$ es el punto $Q\left(\frac{1}{p} : \frac{1}{q} : \frac{1}{r}\right)$)

Esta recta pasa también por el simediano $K = (a^2 : b^2 : c^2)$ del triángulo.

Por último la ecuación de Γ_1 en baricéntricas es

$$\Gamma_1\colon (S_C - c^2)xy + z(S_A x + S_B y - S_C z) = 0$$

Y la intersección con m nos da (además de M) el punto

$$N = (-3a^2 + b^2 + c^2 : a^2 - 3b^2 + c^2 : a^2 + b^2 - 3c^2)$$

■