

Problema 781.- Laboratorio Virtual de Triángulos CABRI.

- En el triángulo ABC, D, E y F son puntos arbitrarios interiores de los lados AB, BC y CA respectivamente.

Sean G, H e I los baricentros de los triángulos ADF, BED y CFE, respectivamente.

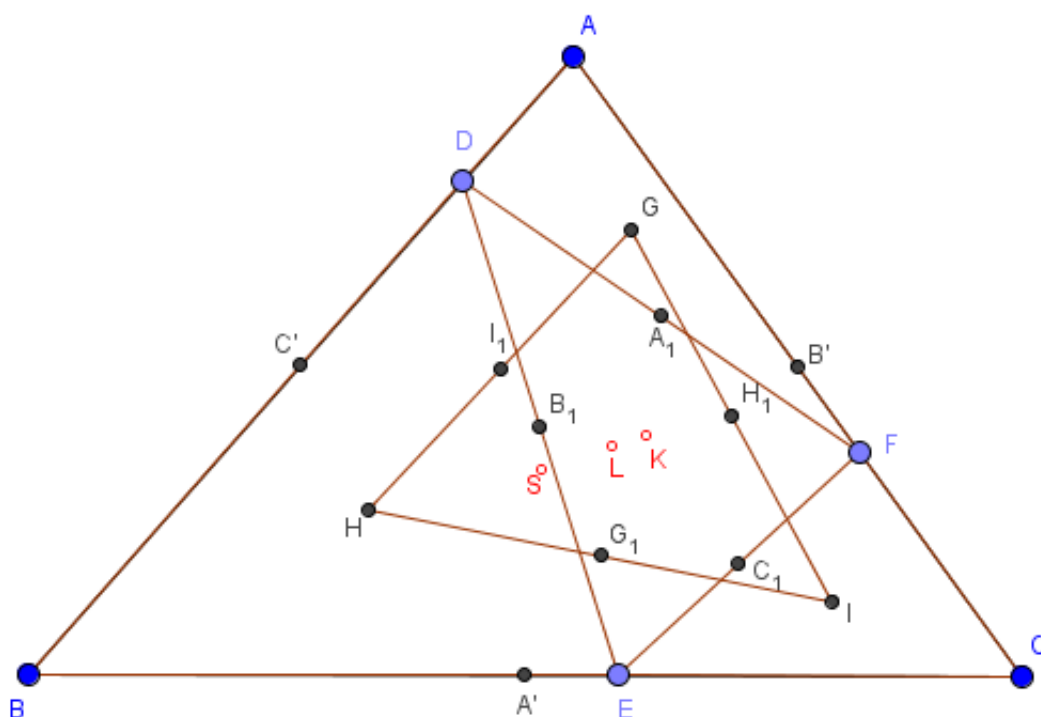
Por último sean S, K y L los baricentros de los triángulos ABC, DEF y GHI.

Demostrar que los puntos S, K L están alineados.

N.D. El director generaliza los puntos D, E y F a las rectas que comprenden los lados de ABC y añade que se verifica que $SK = 3 LK$.

Miklós, Sz.(2016), Komal May.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante (Córdoba)



Sea en un sistema de referencia afín, los puntos :

$$B = \{0, 0\}, C = \{1, 0\} \text{ y } A = \{m, n\}$$

Sean además los puntos :

$$D = \{tm, tn\}, E = \{s, 0\} \text{ y } F = \{1+u(m-1), un\}, \text{ siendo } t, s, u \in \mathbb{R} \text{ (arbitrarios)}$$

Por tanto, los baricentros G, H e I tendrán de coordenadas :

$$G \rightarrow \frac{1}{3} \{m, n\} + \frac{1}{3} \{tm, tn\} + \frac{1}{3} \{1+u(m-1), un\}$$

$$G \rightarrow \left\{ \frac{1}{3} (1-u+m(1+t+u)), \frac{1}{3} n (1+t+u) \right\}$$

$$H \rightarrow \frac{1}{3} \{0, 0\} + \frac{1}{3} \{tm, tn\} + \frac{1}{3} \{s, 0\}$$

$$H \rightarrow \left\{ \frac{1}{3} (s + mt), \frac{nt}{3} \right\}$$

$$I \rightarrow \frac{1}{3} \{1, 0\} + \frac{1}{3} \{s, 0\} + \frac{1}{3} \{1 + u(m - 1), un\}$$

$$I \rightarrow \left\{ \frac{1}{3} (2 + s + (-1 + m)u), \frac{nu}{3} \right\}$$

Por tanto, los baricentros S, K y L tendrán de coordenadas :

$$B = \{0, 0\}, C = \{1, 0\} \text{ y } A = \{m, n\} D = \{tm, tn\}, E = \{s, 0\} \text{ y } F = \{1 + u(m - 1), un\} G \rightarrow$$

$$\left\{ \frac{1}{3} (1 - u + m(1 + t + u)), \frac{1}{3} n(1 + t + u) \right\} H \rightarrow \left\{ \frac{1}{3} (s + mt), \frac{nt}{3} \right\} I \rightarrow \left\{ \frac{1}{3} (2 + s + (-1 + m)u), \frac{nu}{3} \right\}$$

$$S \rightarrow \frac{1}{3} \{0, 0\} + \frac{1}{3} \{1, 0\} + \frac{1}{3} \{m, n\}$$

$$S \rightarrow \left\{ \frac{1+m}{3}, \frac{n}{3} \right\}$$

$$K \rightarrow \frac{1}{3} \{tm, tn\} + \frac{1}{3} \{s, 0\} + \frac{1}{3} \{1 + u(m - 1), un\}$$

$$K \rightarrow \left\{ \frac{1}{3} (1 + s - u + m(t + u)), \frac{1}{3} n(t + u) \right\}$$

$$L \rightarrow \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{3} (1 - u + m(1 + t + u)), \frac{1}{3} n(1 + t + u) \right\} +$$

$$\frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{3} (s + mt), \frac{nt}{3} \right\} + \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{3} (2 + s + (-1 + m)u), \frac{nu}{3} \right\}$$

$$L \rightarrow \left\{ \frac{1}{9} (3 + m + 2s + 2mt - 2u + 2mu), \frac{1}{9} n(1 + 2t + 2u) \right\}$$

$$\overrightarrow{SK} \rightarrow \left\{ \frac{1}{3} (1 + s - u + m(t + u)), \frac{1}{3} n(t + u) \right\} - \left\{ \frac{1+m}{3}, \frac{n}{3} \right\}$$

$$\overrightarrow{SK} \rightarrow \left\{ \frac{1}{3} (s - u + m(-1 + t + u)), \frac{1}{3} n(-1 + t + u) \right\}$$

$$\overrightarrow{LK} \rightarrow \left\{ \frac{1}{3} (1 + s - u + m(t + u)), \frac{1}{3} n(t + u) \right\} - \left\{ \frac{1}{9} (3 + m + 2s + 2mt - 2u + 2mu), \frac{1}{9} n(1 + 2t + 2u) \right\}$$

$$\overrightarrow{LK} \rightarrow \left\{ \frac{1}{9} (s - u + m(-1 + t + u)), \frac{1}{9} n(-1 + t + u) \right\}$$

En efecto, $\overrightarrow{SK} = 3 \overrightarrow{LK}$, c.q.d.