Problema 781.

B. 4797.

En el triángulo ABC, D, E y F son puntos arbitrarios interiores de los lados AB, BC y CA respectivamente. Sean G, H e I los baricentros de los triángulos ADF, BED y CFE, respectivamente. Por último sean S, K y L los baricentros de los triángulos ABC, DEF y GHI. Demostrar que los puntos S, K L están alineados.

N. D. El director generaliza los puntos D,E y F a las rectas que comprenden los lados de ABC y añade que se verifica que SK=3LK

Miklós, Sz. (2016), Komal May. http://www.komal.hu/verseny/feladat.cgi?a=honap&h=201605&t=mat&l=en

Solución del director:

Usaremos vectores.

Por comodidad, y sin pérdida de generalidad, tomaremos A como origen, y denotaremos, por ejemplo como a AB el vector AB.

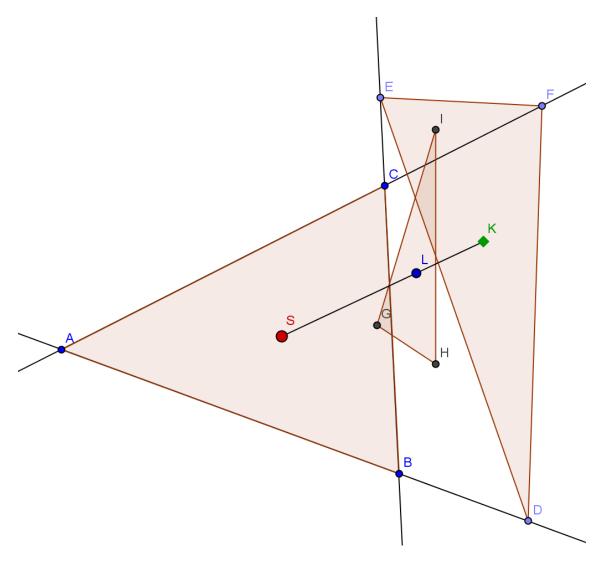
En el triángulo ABC, AS=(1/3)(AB+AC).

AE+EF=AF, luego EF=AF-AE. AE+ED=AD, luego ED=AD-AE.

Asi, EK=(1/3)(ED+EF)=(1/3)(AF+AD-2AE)

Y tenemos AK=(1/3)(AF+AD-2AE+3AE)=(1/3)(AF+AD+AE)

En el triángulo ADF, es AG=(1/3)(AD+AF).



En el triángulo BED, busquemos los vectores BE y BD para conocer BH, siendo H el baricentro de BED:

AB+BE=AE, luego BE=AE-AB.

AB+BD=AD, luego BD=AD-AB.

Así, es BH=(1/3)(AE+AD-2AB), y por ello, AH=AB+BH=(1/3)(AE+AD+AB)

Así por analogía para el triángulo CFE, siendo I su baricentro es AI= (1/3)(AE+AF+AC)

De esta manera podemos obtener para el triángulo GHI, los siguientes datos:

GI=AI-AG=(1/3)(AE+AF+AC) - (1/3)(AD+AF) = (1/3)(AE+AC-AD)

GH=AH-AG=(1/3)(AE+AD+AB) - (1/3)(AD+AF) = (1/3)(AE+AB-AF).

De esta forma obtenemos para L, baricentro de GHI, que

GL=(1/3)(1/3) (2AE+AB+AC-AD-AF), y entonces.

AL=AG+GL=(1/3)(AD+AF)+(1/9) (2AE+AB+AC-AD-AF), por lo que

AL = (1/9) (AB + AC + 2AE + 2AD + 2AF).

Ahora podemos obtener los vectores SK y LK.

SK= AK-AS= (1/3)(AF+AD+AE) - (1/3)(AB+AC)= (1/3) (CF+BD+AE)

LK=AK-AL= (1/3)(AF+AD+AE) - (1/9) (AB+AC + 2AE +2AD + 2AF)=
=(1/9) (AF+AD+AE-AB-AC)=1/9(CF+BD+AE)

Así se tiene lo pedido.

Ricardo Barroso Campos

Jubilado.

Sevilla España