

Problema 781.

B. 4797.

En el triángulo ABC, D, E y F son puntos arbitrarios interiores de los lados AB, BC y CA respectivamente. Sean G, H e I los baricentros de los triángulos ADF, BED y CFE, respectivamente. Por último sean S, K y L los baricentros de los triángulos ABC, DEF y GHI. Demostrar que los puntos S, K L están alineados.

N. D. El director generaliza los puntos D,E y F a las rectas que comprenden los lados de ABC y añade que se verifica que $SK=3LK$

Miklós, Sz. (2016), Komal May.

<http://www.komal.hu/verseny/feladat.cgi?a=honap&h=201605&t=mat&l=en>

Solución del director:

Usaremos vectores.

Por comodidad, y sin pérdida de generalidad, tomaremos A como origen, y denotaremos, por ejemplo como a AB el vector AB.

En el triángulo ABC, $AS=(1/3)(AB+AC)$.

$AE+EF=AF$, luego $EF=AF-AE$. $AE+ED=AD$, luego $ED=AD-AE$.

Así, $EK=(1/3)(ED+EF)=(1/3)(AF+AD-2AE)$

Y tenemos $AK=(1/3)(AF+AD-2AE+3AE)=(1/3)(AF+AD+AE)$

En el triángulo ADF, es $AG=(1/3)(AD+AF)$.

Ahora podemos obtener los vectores SK y LK.

$$SK = AK - AS = \left(\frac{1}{3}\right)(AF + AD + AE) - \left(\frac{1}{3}\right)(AB + AC) = \left(\frac{1}{3}\right)(CF + BD + AE)$$

$$\begin{aligned} LK &= AK - AL = \left(\frac{1}{3}\right)(AF + AD + AE) - \left(\frac{1}{9}\right)(AB + AC + 2AE + 2AD + 2AF) = \\ &= \left(\frac{1}{9}\right)(AF + AD + AE - AB - AC) = \frac{1}{9}(CF + BD + AE) \end{aligned}$$

Así se tiene lo pedido.

Ricardo Barroso Campos

Jubilado.

Sevilla España