Problema 781 de *triánguloscabri*. *Sean ABC un triángulo y X, Y, Z puntos sobre las rectas BC, CA y AB, respectivamente. Sean G, G', G_a, G_b, G_c los baricentros de los triángulos ABC, XYZ, AYZ, BZX y CXY, respectivamente, y sea G'' el baricentro de $G_aG_bG_c$. Demostrar que G'' divide a GG' en la razón $2:1$.*

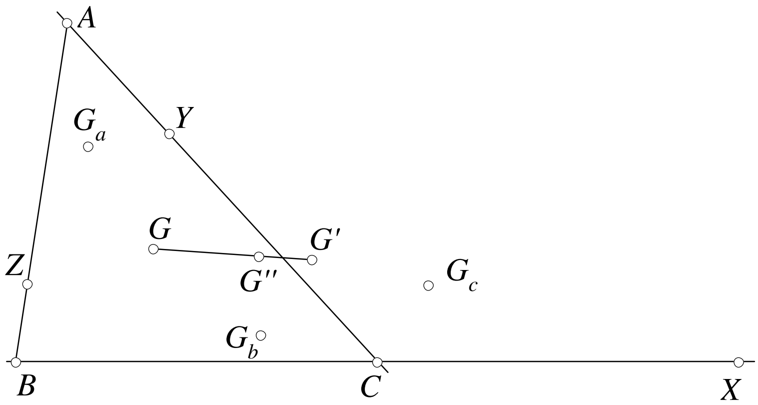
Propuesto por Ricardo Barroso Campos a partir del problema Komal B4797 (Sz. Miklós).

Solución por *Francisco Javier García Capitán*. Usango geometría de masas tenemos

$$\begin{cases} 3G_a = A + Y + Z \\ 3G_b = B + Z + X \\ 3G_c = C + X + Y \\ 3G = A + B + C \\ 3G' = X + Y + Z \\ 3G'' = G_a + G_b + G_c \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} 9G'' =& 3G_a + 3G_b + 3G_C = (A + B + C) + 2(X + Y + Z) \\ =& 3G + 6G' \Rightarrow 3G'' = G + 2G' \Rightarrow GG'' : G''G' = 2 : 1. \end{aligned}$$



Teniendo en cuenta que la recta $GG'G''$ pasa por el baricentro G de ABC, podemos hacernos algunas preguntas:

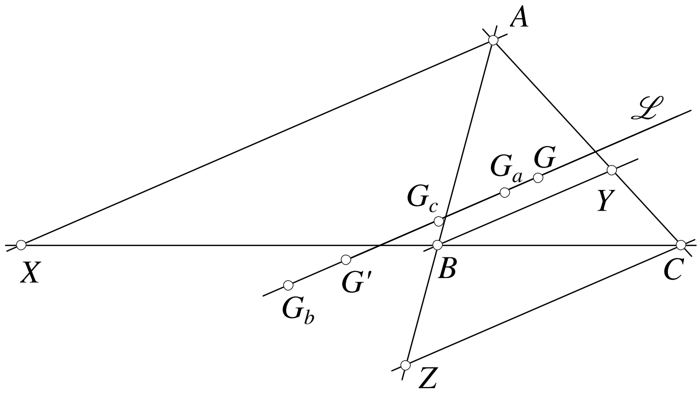
Proposición. *Si XYZ es el triángulo ceviano de un punto P, el lugar de P para que la recta $GG'G''$ sea una recta dada $\mathscr{L}$ que pase por G es la cúbica pivotal que tiene polo el punto G y pivote el punto infinito de $\mathscr{L}$, es decir, los puntos P tales que la recta que une P y el conjugado isotómico de P es paralela a r.*

En efecto, dada la recta $\mathscr{L} : px+qy+rz = 0$ que pasa por G, el lugar geométrico de los puntos P para los que el triángulo ceviano XYZ de P cumple que la recta $GG'G'' = \mathscr{L}$, es la cúbica

$$\mathscr{C} : \sum_{\text{cíclica}} (p(y + z) - qy - rz)\, yz = 0,$$

que pasa por G y el punto infinito $J = (q - r : r - p : p - q)$ de $\mathscr{L}$.

En la figura siguiente, XYZ es el triángulo ceviano de J y en este caso vemos que los tres baricentros G_a, G_b, G_c están también sobre $\mathscr{L}$.



En esta otra figura hemos llamado $X'Y'Z'$ al triángulo ceviano de J, y $X'Y'Z'$ es el triángulo ceviano del conjugado isotómico de J. En este caso, observamos la particularidad de que, por ejemplo, G_a, A y X' están alineados, y lo miso ocurre con G_b, B e Y', y con G_c, C y Z'.