

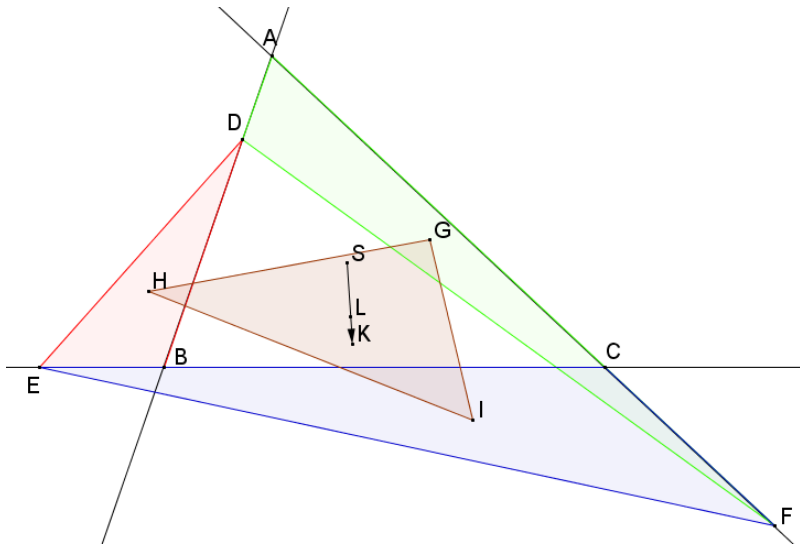
Problema # 781

B. 4797.

En el triángulo ABC, D, E y F son puntos arbitrarios interiores de los lados AB, BC y CA respectivamente. Sean G, H e I los baricentros de los triángulos ADF, BED y CFE, respectivamente. Por último sean S, K y L los baricentros de los triángulos ABC, DEF y GHI. Demostrar que los puntos S, K y L están alineados.

N. D. El director generaliza los puntos D,E y F a las rectas que comprenden los lados de ABC y añade que se verifica que $SK=3LK$

Miklós, Sz. (2016),Komal Mayo

Solution proposée par Philippe Fondanaiche

Remarque liminaire: dans un repère orthonormé Oxy, on désigne par $\vec{M}$ le vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Les points S,G,H,I,K et L étant les centres de gravité respectifs des triangles ABC,ADF,BED,CFE,DEF et GHI, on a les relations:

$$3\vec{S} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}, 3\vec{G} = \vec{A} + \vec{D} + \vec{F}, 3\vec{H} = \vec{B} + \vec{D} + \vec{E}, 3\vec{I} = \vec{C} + \vec{E} + \vec{F}, 3\vec{K} = \vec{D} + \vec{E} + \vec{F}, 3\vec{L} = \vec{G} + \vec{H} + \vec{I}$$

On en déduit $3(\vec{G} + \vec{H} + \vec{I}) = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + 2(\vec{D} + \vec{E} + \vec{F})$ puis $9\vec{L} = (\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}) + 2(\vec{D} + \vec{E} + \vec{F})$.

$$\text{D'où } 3\vec{SK} = 3\vec{K} - 3\vec{S} = \vec{D} + \vec{E} + \vec{F} - (\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}) \text{ et } 9\vec{LK} = 9\vec{K} - 9\vec{L} = 3(\vec{D} + \vec{E} + \vec{F}) - (\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}) - 2(\vec{D} + \vec{E} + \vec{F}) = \vec{D} + \vec{E} + \vec{F} - (\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}) = 3\vec{SK}$$

Il en résulte que $3\vec{LK} = \vec{SK}$. Les points S,K et L sont alignés et on a la relation $SK = 3LK$.