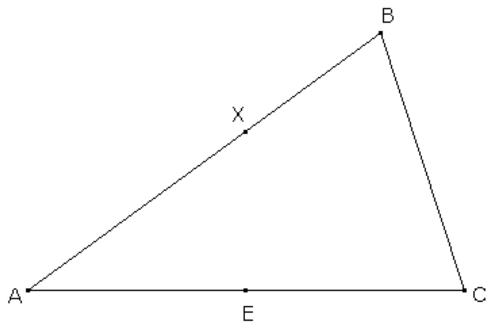
# Artículo Extra sobre el número 800 de la Revista. Sobre Proporciones.

**F. Damián Aranda Ballesteros.**

## Problema 1.-

Sea ABC un triángulo isósceles con un punto X sobre AB tal que se verifique que $AX = CX = BC$. Demuestra que:



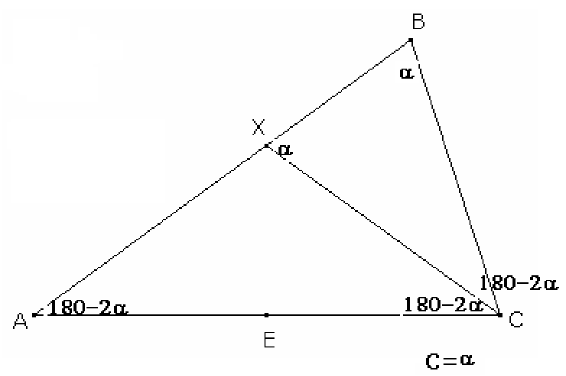

i) $\angle BAC = 36º$.

ii) $\frac{AX}{XB} = \frac{\phi}{1}$. ($\phi = Número\ de\ Oro$)

iii) Sea E el punto medio del lado C. Si XB=1, calcula XE y deduce los valores de $sen\ 36º, cos\ 36º\ y\ tan\ 36º$.

**Solución:**

Como AB=AC entonces ∠ABC=∠ACB=α. La igualdad AX=CX=BC nos permite asignar valores para los siguientes ángulos:

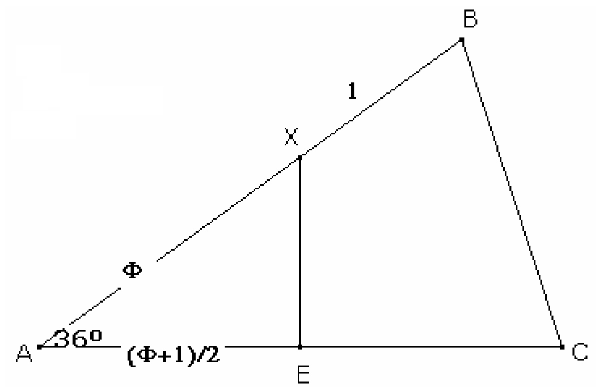
| | |
|---|---|
|  | En definitiva,<br>∠ACB=α = 2·(180º−2α);<br>α= 72º<br>Por tanto,<br>∠BAC= 180º−144º = 36º (i)<br><br>Como quiera que CX es la bisectriz interior del ángulo C en el triángulo ABC, tenemos que:<br><br>AX/XB=AC/BC |

Como $AC = AB = AX + XB$ y $BC = CX = AX$, entonces $AX/XB = AC/BC$; $AX/XB = (AX + XB)/AX$.

En definitiva, $AX/XB = 1 + XB/AX$.

Si llamamos $k = AX/XB$, entonces $k = 1 + \frac{1}{K}$; $k^2 - k - 1 = 0$; cuya solución positiva $k = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ coincide con el número de Oro, $\phi$.

En definitiva, $AX : XB = \phi (ii)$.




$$XE^2 = \phi^2 - \left(\frac{1}{2}.(\phi+1)\right)^2;$$
$$XE^2 = \frac{4\phi^2 - \phi^2 - 2\phi - 1}{4};$$
$$XE^2 = \frac{3\phi^2 - 2\phi - 1}{4} = \frac{3(\phi+1) - 2\phi - 1}{4};$$
$$XE^2 = \frac{\phi+2}{4};$$
$$XE = \frac{1}{2}.\sqrt{\phi+2}$$

$$\cos 36º = \frac{\phi+1}{2.\phi} = \frac{1}{2}.\frac{\phi+1}{\phi} = \frac{1}{2}.(1+\phi-1) = \frac{\phi}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

$$\operatorname{sen} 36º = \frac{\sqrt{\phi+2}}{2.\phi} = \sqrt{\frac{\phi+2}{4\phi^2}} = \sqrt{\frac{1}{4}.\left(\frac{1}{\phi}+2.\frac{1}{\phi^2}\right)} = \sqrt{\frac{1}{4}.\left(\phi-1+2.(1-\frac{1}{\phi})\right)} = \sqrt{\frac{1}{4}.(\phi-1+2.(1-\phi+1))};$$
$$\operatorname{sen} 36º = \sqrt{\frac{1}{4}.(\phi-1+4-2\phi)} = \sqrt{\frac{1}{4}.(3-\phi)} = \sqrt{\frac{1}{8}.\left(5-\sqrt{5}\right)}$$

$$\tan 36º = \frac{\sqrt{\phi+2}}{\phi+1} = \sqrt{\frac{\phi+2}{\phi^4}} = \sqrt{\left(\frac{1}{\phi^3}+2.\frac{1}{\phi^4}\right)} = \sqrt{(2\phi-3+2.(5-3\phi))} = \sqrt{7-4\phi};$$
$$\tan 36º = \sqrt{7-4.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{10-4\sqrt{5}}{2}\right)} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

## Problema 2.-

Justifica las dos siguientes construcciones del pentágono regular.

**CONSTRUCCIÓN DE UN PENTÁGONO REGULAR (I).**

1.- Divide un segmento AB en la media y extrema razón en el punto F.
2.- Construye los círculos $A(F)\ y\ F(B)$ que se cortarán en C.
3.- Construye el círculo de centro C y radio AB que cortará a los dos círculos $A(F)\ y\ F(B)$ en los puntos D y E, respectivamente.
4.- Entonces, ACBED es un pentágono regular.

**Solución:**

En el triángulo isósceles AFC, tenemos por el teorema del coseno,

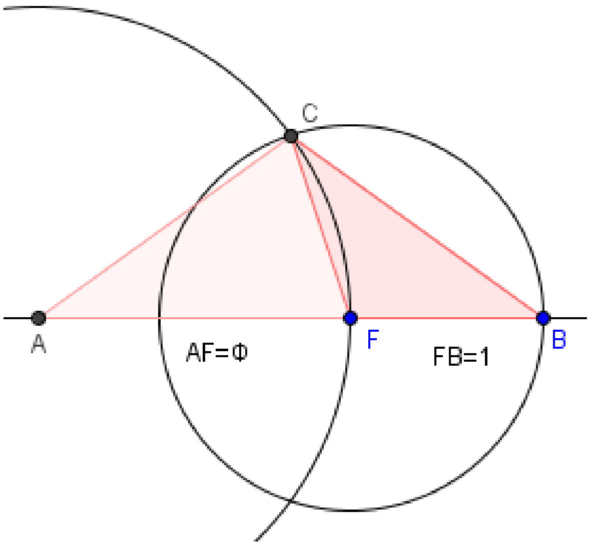
$1 = \phi^2 + \phi^2 - 2\phi^2 . \cos A;$

$$\cos A = \frac{2\phi^2 - 1}{2\phi^2} = 1 - \frac{1}{2}(\phi - 1)^2$$

$$\cos A = \frac{2 - \phi^2 + 2\phi - 1}{2}$$

$$\cos A = \frac{2 - \phi - 1 + 2\phi - 1}{2} = \frac{\phi}{2}$$

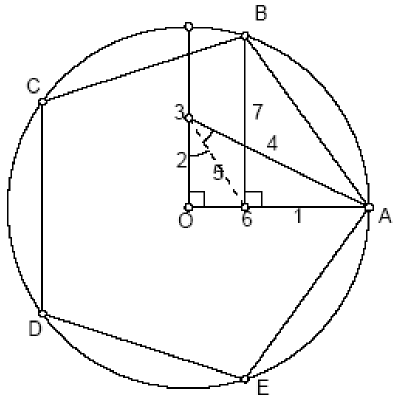
En definitiva, A=36º y los ángulos del triángulo isósceles FBC serían iguales a 108º, 36º y 36º.




Recordamos que en un pentágono regular convexo, la diagonal y el lado forman proporción áurea. Por ello, el segmento AB será la diagonal de nuestro futuro pentágono y el segmento $AF = AC = BC$ será el lado. Por tanto el punto C pertenecerá a las circunferencias $A(F)\ y\ F(B)$. Una vez determinado el punto C, ya tenemos, tres vértices consecutivos del pentágono regular. Para construir los dos puntos restantes, D y E, bastará construir los pares de circunferencias $C(AB)\ y\ A(F)$, por un lado y $C(AB)\ y\ B(AF)$, por otro.

**CONSTRUCCIÓN DE UN PENTÁGONO REGULAR (II).**

Justifica la siguiente construcción del pentágono regular, donde los números del 1 al 7 indican el orden de los pasos a realizar.




**Solución:**

Supongamos el radio de la circunferencia circunscrita igual a la unidad y obtengamos el valor del lado AB. Para ello, sigamos en el orden, los pasos seguidos en la construcción:

1) OA =1
2) Con el siguiente paso, trazamos el radio perpendicular al segmento OA por el punto O.
3) Por el punto medio de este segmento, construimos el triángulo rectángulo de catetos 1 y 1/2 e hipotenusa $\frac{\sqrt{5}}{2}$.
4) Trazamos la bisectriz correspondiente al ángulo opuesto al cateto de longitud 1, determinando en este cateto dos segmentos de longitudes (1−x) y x de modo que, por el Teorema de la bisectriz $\frac{1-x}{x} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$. Así el valor de x será:

$$\frac{1}{x} - 1 = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{5+\sqrt{5}}{5} \Rightarrow x = \frac{5.(5-\sqrt{5})}{(5+\sqrt{5}).(5-\sqrt{5})} = \frac{5.(5-\sqrt{5})}{20} = \frac{1}{4}.(5-\sqrt{5})$$

$$1 - x = 1 - \frac{1}{4}.(5-\sqrt{5}) = \frac{1}{4}.(\sqrt{5}-1)$$

5) De esta forma, el paso siguiente se determinará resolviendo por Pitágoras el triángulo rectángulo de hipotenusa 1 y uno de los catetos igual a (1−x).

$$1-(1-x)^2 = 1 - \left(\frac{1}{4}.(\sqrt{5}-1)\right)^2 = \frac{1}{16}.(16-6+2\sqrt{5}) = \frac{1}{16}.(10+2\sqrt{5})$$

6) Resolviendo el triángulo rectángulo de catetos, uno igual a x y el otro cuyo valor al cuadrado conocemos del paso anterior, nos permitirá encontrar AB.

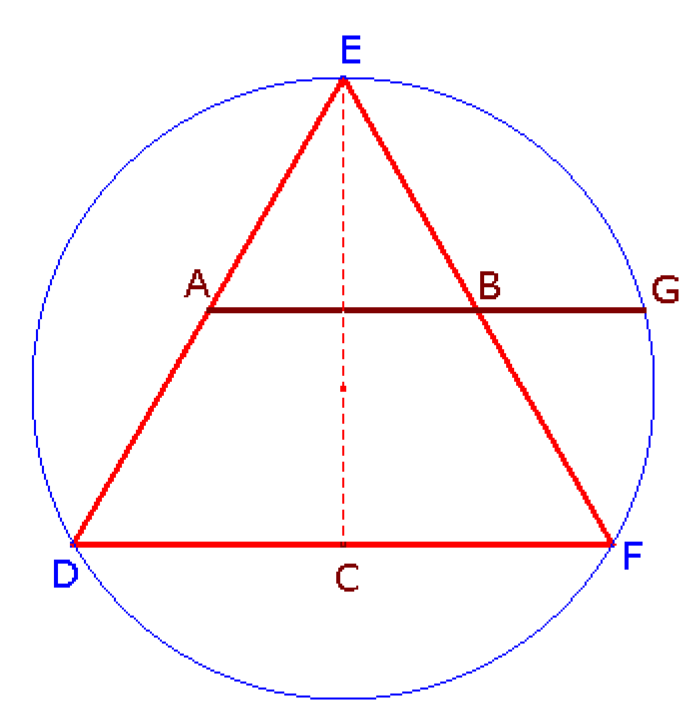
$$\left(\frac{1}{4}.(5-\sqrt{5})\right)^2 + \frac{1}{16}.(10+2\sqrt{5}) = \frac{1}{16}.(30-10\sqrt{5}+10+2\sqrt{5}) = \frac{1}{16}.(40-8\sqrt{5})$$

7) $AB = \frac{1}{4}.\sqrt{40-8\sqrt{5}} = \frac{1}{2}.\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ , que coincide con el valor del lado de un pentágono regular en función del radio 1 del círculo que lo circunscribe.

## Problema 3.-

**Justifica las dos siguientes construcciones del número áureo $\phi$.**

Construcción (I).




$$\frac{AG}{AB} = \phi$$

**Solución:**

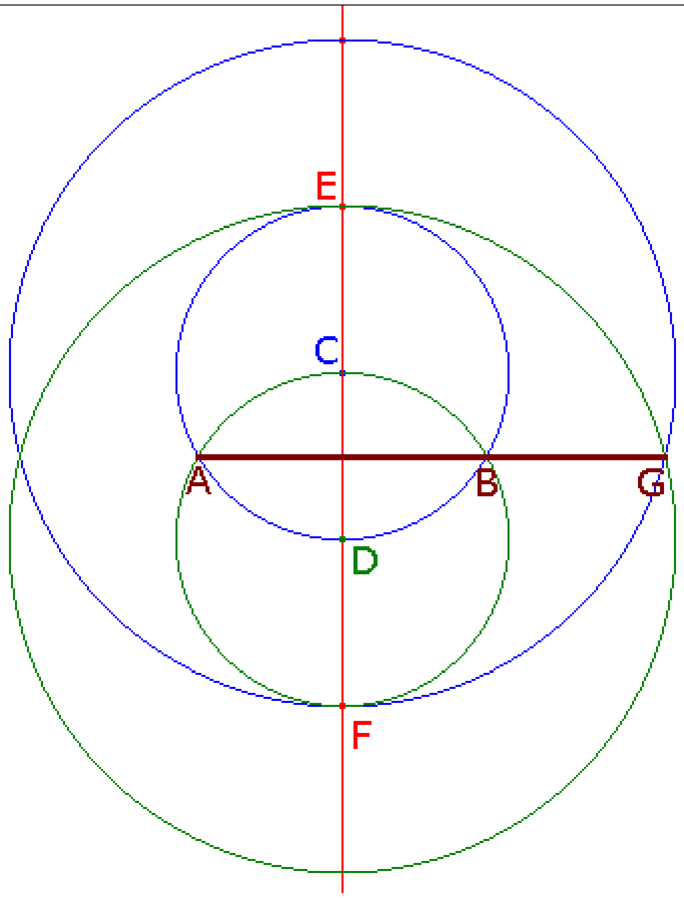
Consideramos que el triángulo equilátero sea de lado 2, lo cual no quita generalidad al razonamiento.

Por tanto, el radio de la circunferencia circunscrita será igual a $\sqrt{3}$. Los puntos $A$ y $B$ son, respectivamente, los puntos medios de los lados ED y EF, y así AB será la paralela media del lado DF. Su longitud será $AB = 1$.

Si llamamos x a la longitud del segmento BG, tenemos que, por la propiedad de la potencia del punto B respecto a la circunferencia circunscrita, $x(1 + x) = 1$, de donde resulta que $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \phi - 1$.

Por tanto, $\frac{AG}{AB} = \frac{1+\phi-1}{1} = \phi$.

Construcción (II).




1. Construimos dos circunferencias concéntricas de radios 1 y 2 centradas en el punto C.

2.- Construimos dos circunferencias concéntricas de radios 1 y 2 centradas en el punto D.

3.- Trazamos la recta por los puntos donde se cortan las dos circunferencias pequeñas en A y las dos grandes en G.

4.- La razón de longitudes entre los segmentos AG y AB es $\phi$.

**Solución:**

Según los valores de los radios dados, tenemos que el valor del segmento $AB = \sqrt{3}$.

Si O es el punto medio del segmento AB, entonces $OG^2 = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} \rightarrow OG = \frac{\sqrt{15}}{2}$.

Por tanto, $AG = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2}$ y así, finalmente, $\frac{AG}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$.

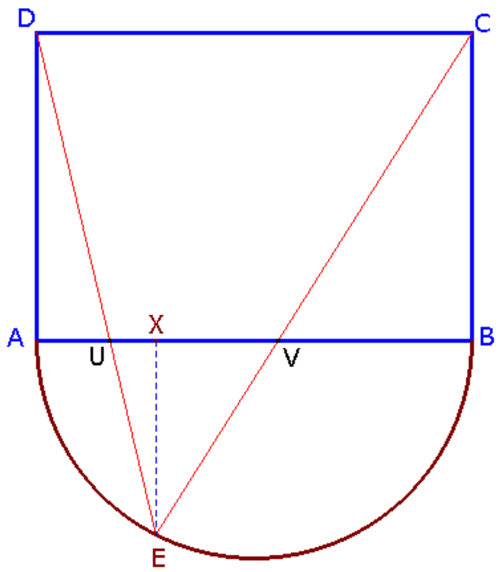
## Problema 4.-

En un rectángulo ABCD de lados $a, b$ y de módulo $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$, construimos sobre el lado mayor una semicircunferencia. Sea E un punto cualquiera sobre ella. Unimos E con los vértices C y D del rectángulo.

Si llamamos U y V, respectivamente, a los puntos donde ED y EC cortan al lado AB.

Demuestra que se verifica la relación $AV^2 + BU^2 = b^2$.

**Solución:**




Trazamos por el punto E la perpendicular al diámetro AB de la semicircunferencia dada. Sea X el pie de dicha perpendicular.

Si llamamos x a la longitud del segmento XE, sabemos que se verificará:

$$AX + XB = b$$

$$AX \cdot XB = x^2$$

Por otra parte, consideramos la semejanza existente entre los siguientes pares de triángulos. Por un lado, OAU y EXU y por otro, CBV y EXV, lo que permite establecer las siguientes relaciones de interés:

$$\frac{AU}{AD} = \frac{XU}{EX}; \qquad \frac{AX - XU}{a} = \frac{XU}{x}; \qquad XU = AX.\frac{x}{a + x}$$

$$\frac{BV}{BC} = \frac{XV}{EX}; \qquad \frac{BX - XV}{a} = \frac{XV}{x}; \qquad XV = BX.\frac{x}{a + x}$$

Como $AV = AX + XV \ y \ BU = BX + XU$, entonces:

$$AV^2 + BU^2 = (AX + XV)^2 + (BX + XU)^2$$

$$AV^2 + BU^2 = AX^2 + 2 \cdot AX \cdot XV + XV^2 + BX^2 + 2 \cdot BX \cdot XU + XU^2$$

En esta expresión de la suma necesitamos sustituir la suma $AX^2 + XV^2$ en función de $x, a \ y \ b$.

Como quiera que $AX + XB = b$ y $AX \cdot XB = x^2$, entonces:

$$(AX + XB)^2 = b^2$$

Desarrollando dicha expresión y despejando, obtenemos que:

$$AX^2 + XB^2 = (AX + XB)^2 - 2 \cdot AX \cdot XB = b^2 - 2x^2$$

En definitiva, tenemos que:

$$AV^2 + BU^2 = AX^2 + 2 \cdot AX \cdot XV + XV^2 + BX^2 + 2 \cdot BX \cdot XU + XU^2$$

$$AV^2 + BU^2 = AX^2 + BX^2 + BX^2 . \frac{x^2}{(a+x)^2} + AX^2 . \frac{x^2}{(a+x)^2} + 2.AX.BX. \frac{x}{a+x} + 2.BX.AX. \frac{x}{a+x}$$

$$AV^2 + BU^2 = \left(AX^2 + BX^2\right) . \left(1 + \frac{x^2}{(a+x)^2}\right) + 4.AX.BX. \frac{x}{a+x}$$

$$AV^2 + BU^2 = \left(b^2 - 2x^2\right) . \left(1 + \frac{x^2}{(a+x)^2}\right) + 4.x^2 . \frac{x}{a+x}$$

Como, por hipótesis $b^2 = 2a^2$, sustituyendo en la expresión anterior, obtenemos:

$$AV^2 + BU^2 = \left(2.a^2 - 2x^2\right) . \left(1 + \frac{x^2}{(a+x)^2}\right) + 4.x^2 . \frac{x}{a+x};$$

$$AV^2 + BU^2 = 2.(a-x). \frac{x^2 + (a+x)^2}{a+x} + \frac{4x^3}{a+x};$$

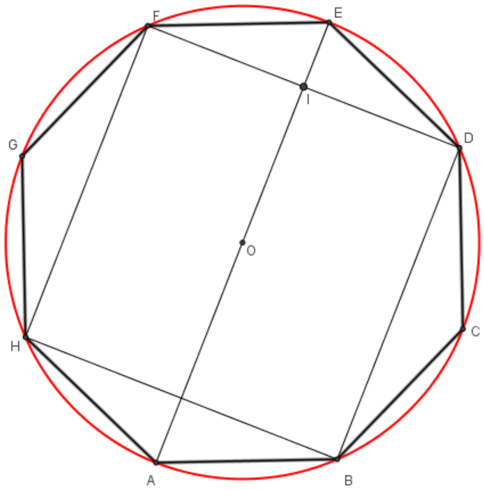
Desarrollando el producto indicado, obtenemos:

$$AV^2 + BU^2 = \frac{2(a-x)(2x^2 + 2ax + a^2) + 4x^3}{(a+x)} = \frac{2a^2.(a+x)}{(a+x)} = 2a^2 = b^2$$

En definitiva, $AV^2 + BU^2 = b^2$, $\boldsymbol{c.q.d.}$

**Problema 5.- La Proporción Cordobesa.**

## 1. LA PROPORCIÓN CORDOBESA. Definición.




Sea R=1 el radio de la circunferencia que circunscribe al cuadrado $BDFH$ y al octógono regular $ABCDEFGH$.
El cuadrado $BDFH$ tiene de lado $DF = \sqrt{2}$.
De esta forma,

$$IE \cdot IA = IF \cdot ID \rightarrow x(2-x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow -x^2 + 2x - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$x = IE = \frac{1}{2}\left(2-\sqrt{2}\right) \rightarrow \mathrm{x}^2 = 2\mathrm{x} - \frac{1}{2} = 2 - \sqrt{2} - \frac{1}{2} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2}$$

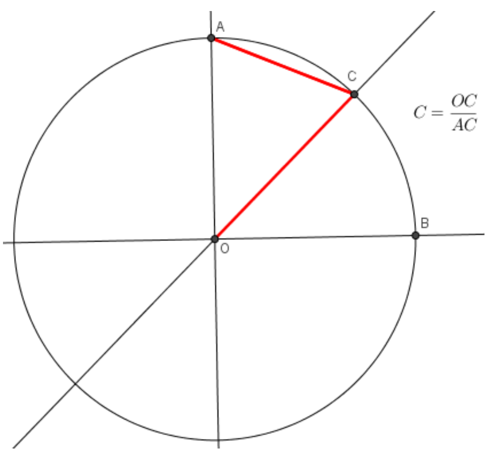
De esta forma, $ED^2 = ID^2 + IE^2 = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{3-2\sqrt{2}}{2} = \frac{4-2\sqrt{2}}{2} = 2-\sqrt{2} \rightarrow \mathrm{ED} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$

En definitiva,

$$\mathrm{C}= \frac{R}{l_8} = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.306566\ldots (\textit{Número Cordobés})$$

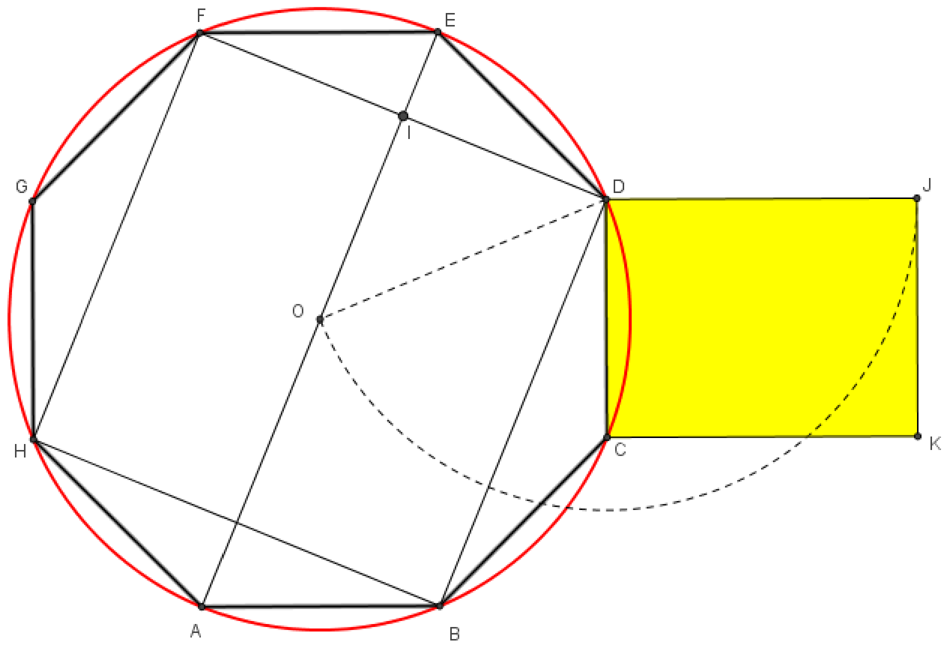
## 2. El Rectángulo Cordobés. Su Construcción (I).

Dada una circunferencia de radio R, trazamos la bisectriz del primer cuadrante. Entonces AC es un lado del rectángulo y OC=R es el otro.



## 3. El Rectángulo Cordobés. Su Construcción (II).

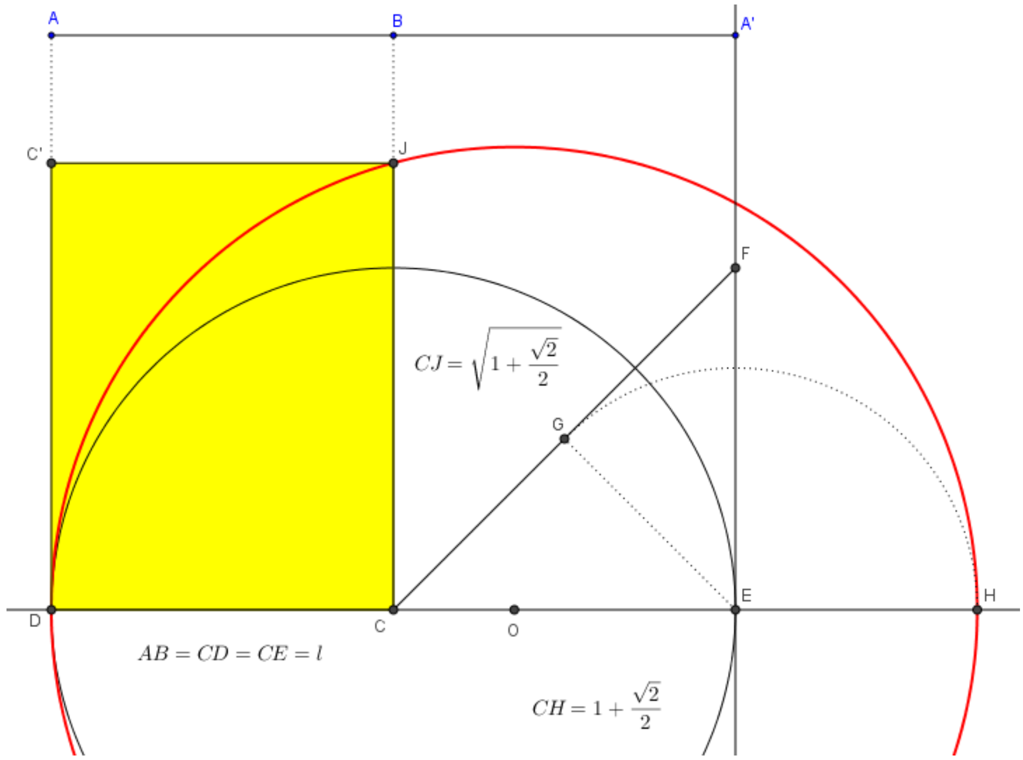
* Dado el lado mayor l, tenemos que construir el segmento $\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right) l$.
Sería el lado del octógono regular de la circunferencia de radio igual R=l.



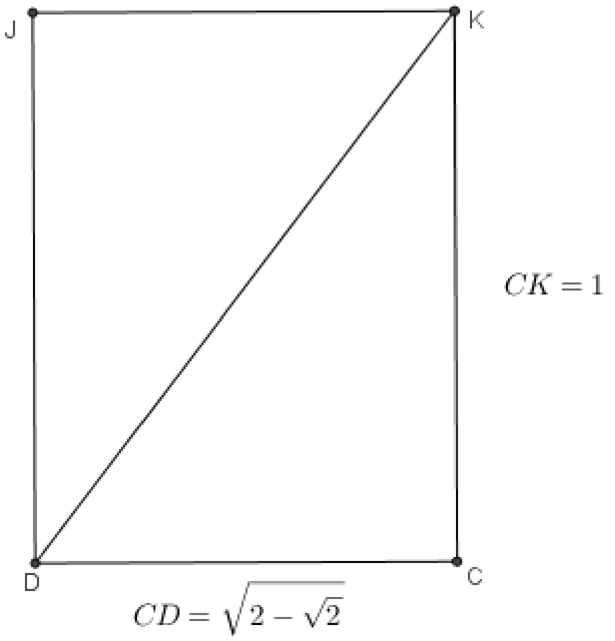

## 4. El Rectángulo Cordobés. Su Construcción (III).

* Dado el lado menor l, tenemos que construir el segmento $\frac{1}{\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)} l = \left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) l$.

Para ello, realizamos la media proporcional de los segmentos $l$ y $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) l$.



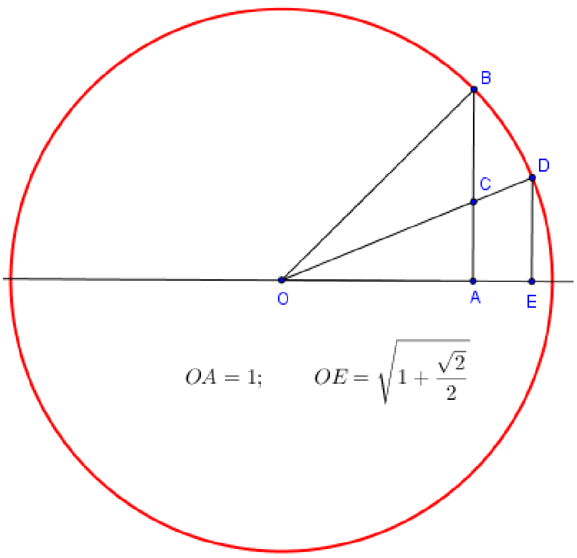
## 5. El Rectángulo Cordobés. Su Diagonal.




$DK = \sqrt{3-\sqrt{2}}$

## 6. Determinación sobre la recta real del Número Cordobés.

Dado el segmento unidad OA, determinaremos sobre la recta real el Número Cordobés.




### * Usando Trigonometría.

Como quiera que C= $\sqrt{\mathbf{1}+\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}}$, manipulamos algebraicamente dicha expresión y obtenemos que

$$C= \sqrt{\mathbf{2}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}+\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{4}}\right)} = \sqrt{\mathbf{2}}\sqrt{\frac{\mathbf{1}+\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}} \rightarrow$$

$$C= \sqrt{\mathbf{2}}\cos\left(\frac{45º}{2}\right).$$

Por tanto, en la figura anterior, si el segmento $OA = U = unidad$, entonces $OE =$ C= $Número\ Cordobés$.

### * Usando Geometría Elemental.

Los triángulos **OCA y ODE** son semejantes.

Como OC es bisectriz del ángulo en O, tenemos que por el Teorema de la Bisectriz aplicado al triángulo **OAB**,

$$\frac{AC}{1}=\frac{BC}{\sqrt{2}}\rightarrow\frac{AC}{1}=\frac{1-AC}{\sqrt{2}}\rightarrow AC=\frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

$$OC^2=OA^2+AC^2\rightarrow OC^2=1+\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=\frac{4+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}=\frac{(4+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}=4-2\sqrt{2}$$

$$OC=\sqrt{2}(\sqrt{2-\sqrt{2}})$$

Por tanto,

$$\frac{OE}{OD}=\frac{OA}{OC}\rightarrow OE=\frac{OA\cdot OD}{OC}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\mathrm{C}$$

En definitiva, $OE=\mathrm{C}=$ $Número\ Cordobés$.

## 7. División de un segmento según la Proporción Cordobesa.

Se trata de dividir un segmento según dicha proporción. Para ello, sea x y 1-x las partes de dicho segmento, deberá suceder que $\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{1-x}}=\mathrm{C}\rightarrow\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{1}}=\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{C}+\mathbf{1}}\rightarrow$ x es la cuarta proporcional entre los segmentos $\mathbf{1}$, $\mathrm{C}$ **y** $\mathrm{C}+\mathbf{1}$.

Si desarrollamos la expresión anterior dl segmento x, obtenemos que

$$\mathrm{x}=\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{C}+\mathbf{1}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\mathrm{C}}}=\frac{1}{1+\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\frac{1-\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-1}=\left(1-\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2}+1\right)=$$
$$\sqrt{2}+1-\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{3+2\sqrt{2}}$$

$$\mathrm{x}=\sqrt{2}+1-\sqrt{2+\sqrt{2}}=1-\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}-1\right)\rightarrow x=1-\sqrt{2}(\mathrm{C}-1).$$

En definitiva, la división de segmento $OA=U=unidad$, se haría de esta forma, pues: