Problemes de geometria per a secundària amb calculadora

Ricard Peiró i Estruch

Introducció

La resolució de problemes comporta un aprenentatge dels processos matemàtics tals com conjecturar, particularitzar-generalitzar, abstraure, provar, establir connexions, però també conéixer teories, algoritmes i saber establir relacions.

Polya indica quatre fases en la resolució d'un problema:

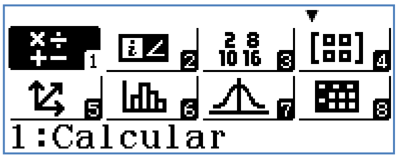
Entendre el problema.

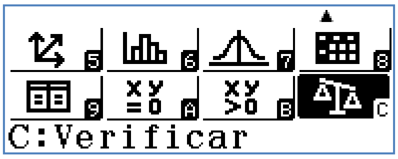
Crear un pla.

Portar a terme el pla o estratègia.

Revisar i interpretar el resultat.

Els menús de la calculadora són molt intuïtius.





La introducció de la calculadora en l'aula, comporta un gran canvi metodològic. Permet l'anàlisi dels resultats agilitant els processos de càlcul i ajuden a la visualització de situacions difícils d'abstraure a partir d'una expressió verbal o a la pissarra.

Una possibilitat que té la calculadora és la utilització del codi QR que permet utilitzar la web de Casio per representar gràficament funcions així com gràfiques estadístiques.

La calculadora també té un emulador per als ordinadors que permet al professorat donar una explicació molt més fluïda sobre els procediments d'utilització de la calculadora.

Aquestes fitxes són les que he portat a l'aula a fi que els alumnes puguen treballar-les amb la calculadora.

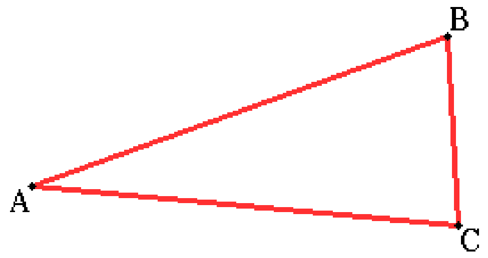
Els problemes els he portat a l'aula de secundària i batxillerat.

Problemes

Problema 1

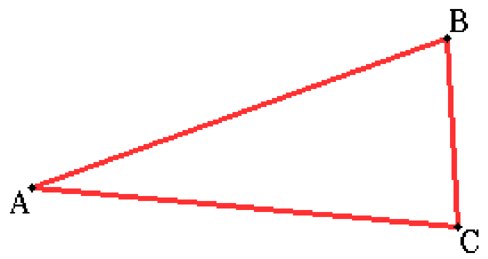
Calculeu l'àrea del triangle de costats $a = 15$, $b = 34$, $c = 35$.

Calculeu les tres altures del triangle



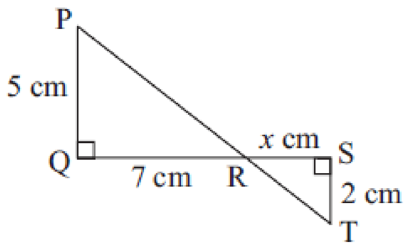
Problema 2

Resoleu el triangle de costats $a = 15$, $b = 34$, $c = 35$.



Problema 3

Determineu el valor de x en la següent figura:



Problema 4

En un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ la diferència entre els costats b i a és 24 m.

La bisectriu de l'angle C divideix el costat c en dos parts, la contigua al costat b mesura 26 m, i l'altra 10m.

Calculeu els costats del triangle i classifiqueu-lo pels angles.

Temas de Grado Elemental, 1967. Problema 1517.

Problema 5

Els vèrtexs d'un triangle són $A(-2,1)$, $B(4,-1)$ i $C(2,5)$. Calculeu:

a) La mesura dels costats.

b) La mesura dels angles.

c) Els punts migs dels costats.

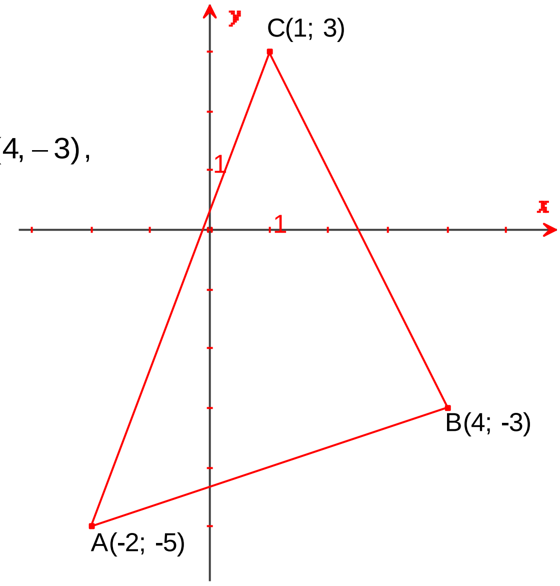
d) El baricentre.

e) La mesura de la mitjana $\overline{AD}$.

Problema 6

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de vèrtexs els punts $A(-2,-5)$, $B(4,-3)$, $C(1,3)$.

Determineu la seua àrea.

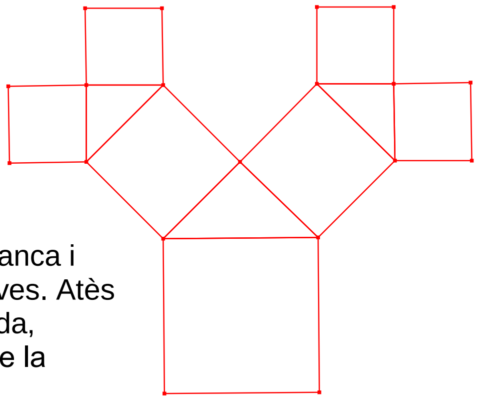


Problema 7

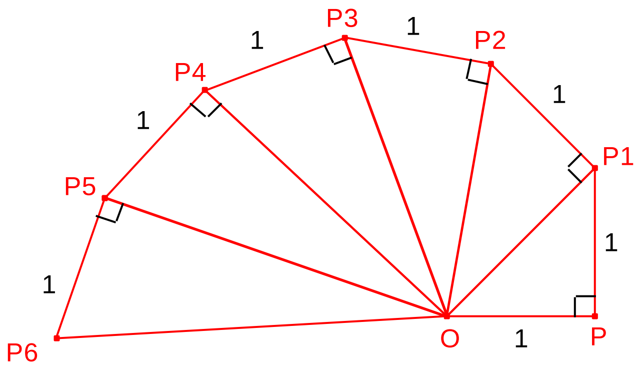
El creixement d'un arbre de Pitàgores té el patró següent:

En el primer any, l'arbre creix el seu tronc, que és un quadrat. En el segon any, un vèrtex d'un triangle rectangle i isòsceles creix a la part superior, tal que la hipotenusa és la part superior del quadrat, i llavors les dues primeres branques, també de forma quadrada, creixen des dels catets del triangle. Llavors aquest patró es repeteix cada any, és a dir, un triangle rectangle isòsceles creix en la part superior de cada branca i les seues bases creixen dues branques de forma quadrada noves. Atès que el tronc (és a dir, el primer quadrat) és de 1 metre d'amplada, calculeu l'altura de l'arbre al final de 4 anys i 16 anys. L'arbre de la imatge té tres anys.

Generalitzeu el resultat.



Problema 8



En la figura, tots els triangles són rectangles en els vèrtexs $P, P_1, P_2, P_3, \ldots$.

$1 = \overline{OP} = \overline{PP_1} = \overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3} = \ldots = \overline{P_iP_{i+1}}$.

a) Calculeu les mesures de les 10 primeres hipotenuses $\overline{OP_1}, \overline{OP_2}, \overline{OP_3}, \overline{OP_4}, \ldots$ dels triangles.

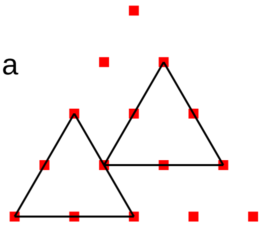
b) Calculeu la mesura de la hipotenusa $\overline{OP_n}$.

c) Calculeu la suma de les 10 primeres hipotenuses.

d) Calculeu la suma de les àrees dels 10 primers triangles.

Problema 9

Siga una graella isomètrica (triangles equilàters) de claus a una distància 1 cm d'un a l'altre com indica l'esquema.
Amb elàstics es formen triangles equilàters de 2 cm de costat. (en la graella s'han dibuixat dos triangles).
Quants triangles equilàters diferents són possibles si la graella té 100 claus per costat del triangle equilàter.



Problema10

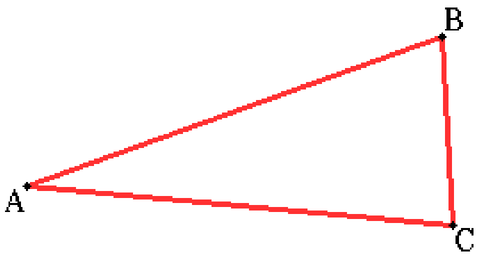
Determineu el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de costats $\overline{AB} = 8\text{ cm}$, $\overline{AC} = 6\text{ cm}$ que té àrea màxima.
En aquest cas, calculeu el valor del costat $\overline{BC}$.

Àrea d'un triangle. Fórmula d'Heró.

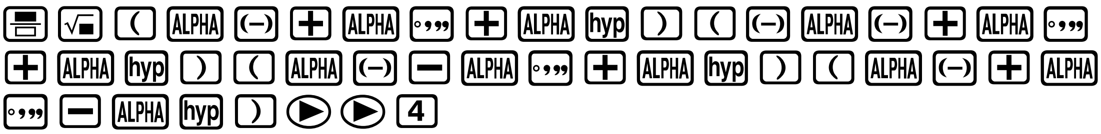
Donat un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de costats coneguts $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AB}=c$, la seua àrea és:

$$S_{ABC}=\frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{4}$$ que s'anomena fórmula d'Heró.

Exemple:
Calculeu l'àrea del triangle de costats $a=15$, $b=34$, $c=35$.



Introduïu la fórmula en la calculadora:

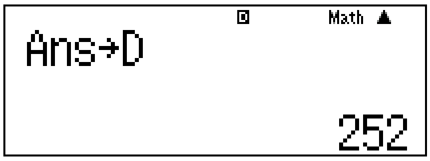


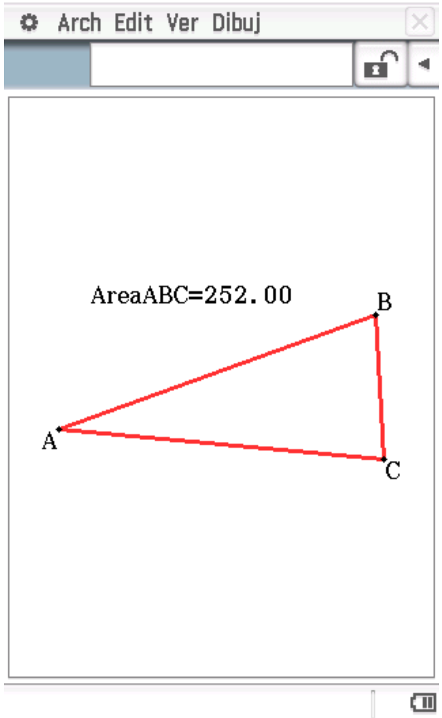
Una vegada introduïda la fórmula podem calcular l'àrea de qualsevol triangle amb la calculadora.

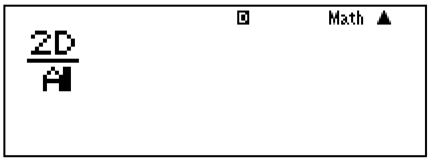
Ara podem calcular les tres altures del triangle.

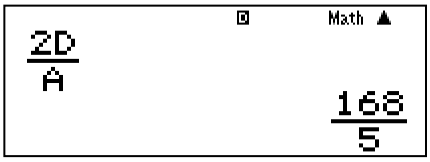
$$h_a = \frac{2 \cdot S_{ABC}}{a},\ h_b = \frac{2 \cdot S_{ABC}}{b},\ h_c = \frac{2 \cdot S_{ABC}}{c}.$$

Guardeu el valor de l'àrea en la variable D

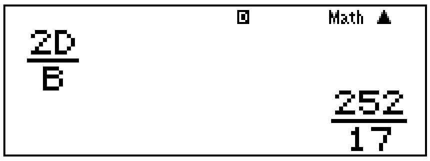


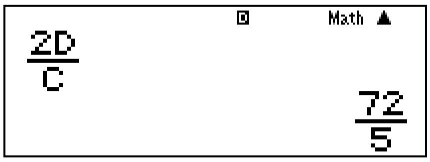






Anàlogament:





Nota: Un triangle és d'Heró si no es rectangle i els seus costat i l'àrea son nombres naturals i no es poden dividir en dos triangles rectangles amb costats naturals.

Exemples de triangles d'Heró:

a) $a = 34, b = 35, c = 39$.

b) $a = 39, b = 58, c = 95$.

c) $a = 34, b = 55, c = 87$.

Calcular l'àrea dels triangles anteriors.

Resolució d'un triangle coneguts tres costats. Teorema del cosinus

Teorema del cosinus

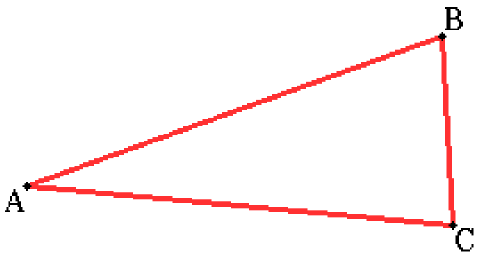
Donat un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de costats coneguts $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$. $A = \arccos\left(\dfrac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}\right)$.

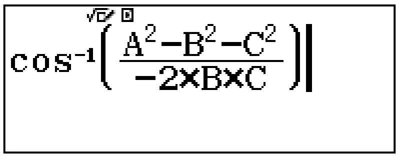
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$. $B = \arccos\left(\dfrac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac}\right)$.

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$. $C = \arccos\left(\dfrac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab}\right)$.

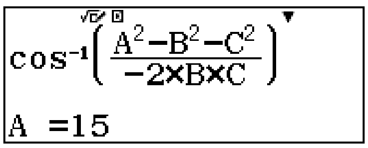
Exemple:
Resoleu el triangle de costats $a = 15$, $b = 34$, $c = 35$.

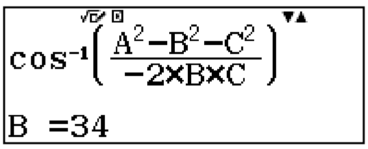


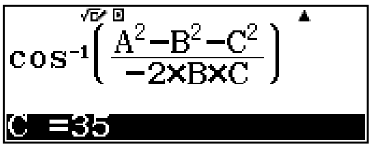
Introduïu la fórmula en la calculadora:

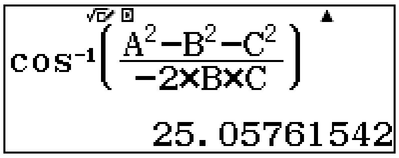


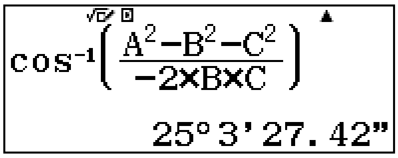
Calculeu l'angle A:







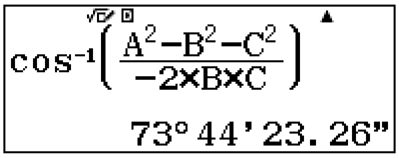


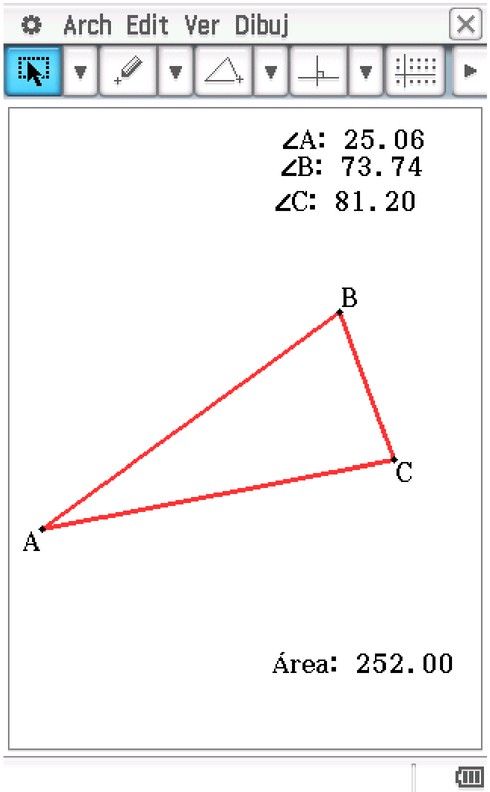


$A = 25^{o}\ 3'\ 27.42''$.

Calculeu l'angle B:

CALC 3 4 = 1 5 = 3 5 = = °'''

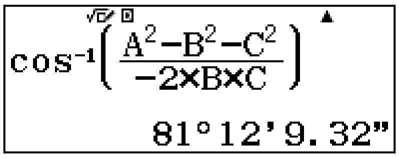




$B = 73^{o}\ 44'\ 23.26''$

Calculeu l'angle C:

CALC 3 5 = 1 5 = 3 4 = = °'''



$C = 81^{o}\ 12'\ 9.32''$.

Exercicis

Resoleu els següents triangles:

a) $a = 15cm, b = 25cm, c = 35cm$.

b) $a = 7cm, b = 8cm, c = 9cm$.

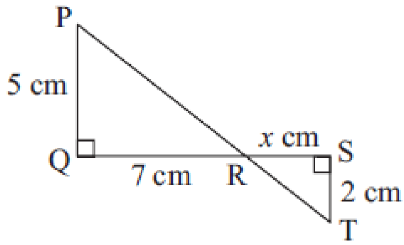
c) $a = 15cm, b = 15cm, c = 20cm$.

d) $a = 5cm, b = 12cm, c = 13cm$.

Teorema de Tales.

Problema 1

Determineu el valor de x en la següent figura:



Solució:

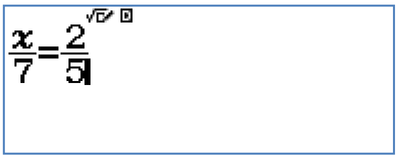
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PQR}$, $\overset{\Delta}{TSR}$ són semblants ja que els costats $\overline{ST}$, $\overline{PQ}$ són paral·lels per ser ambdós perpendiculars a $\overline{QS}$.

Aplicant el teorema de Tales: $\dfrac{\overline{RS}}{\overline{RQ}} = \dfrac{\overline{ST}}{\overline{QP}}$.

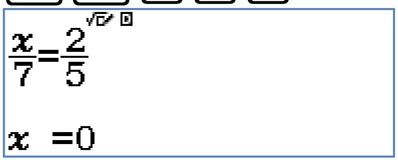
$\dfrac{x}{7} = \dfrac{2}{5}$.

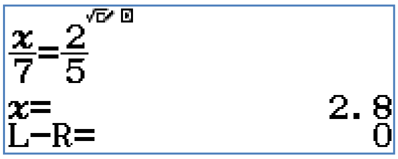
Podem resoldre l'equació amb la calculadora:

Introduïm l'equació:

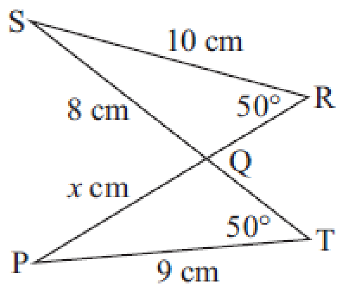


Resolem l'equació:





El valor de x és $x = 2.8\text{cm}$.



Problema 2:

Determineu el valor de x en la següent figura:

Solució:

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PTQ}$, $\overset{\Delta}{SRQ}$ són semblants ja que tenen els angles corresponents iguals,

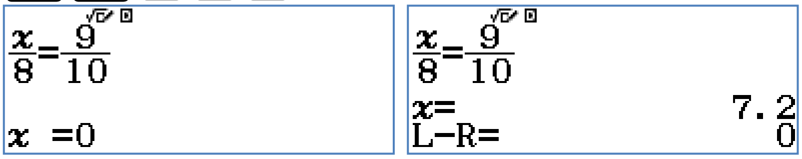
$\angle PTQ = \angle SRQ = 50^o$, i per ser oposats pel vèrtex $\angle PQT = \angle SQR$.

Aplicant el teorema de Tales: $\frac{\overline{PQ}}{\overline{QS}} = \frac{\overline{PT}}{\overline{SR}}$. $\frac{x}{8} = \frac{9}{10}$.

Podem resoldre l'equació amb la calculadora:

Introduïm l'equació:

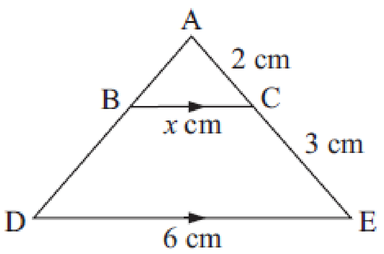
Resolem l'equació:



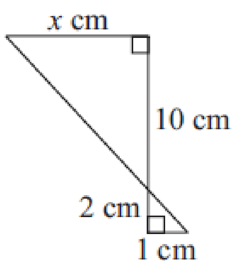
El valor de x és $x = 7.2cm$.

Problemes:

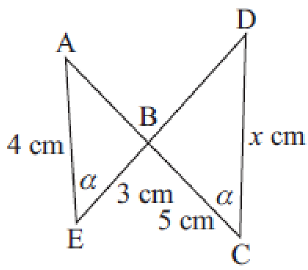
Determineu els valors de x en els següents exercicis:



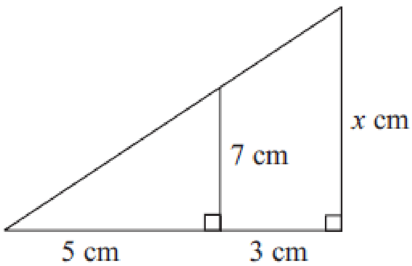
a)



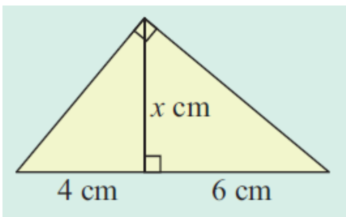
b)



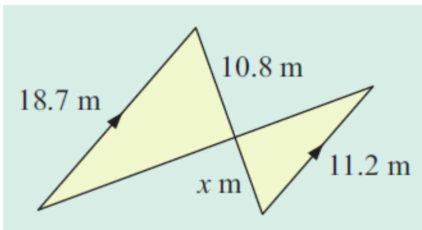
c)



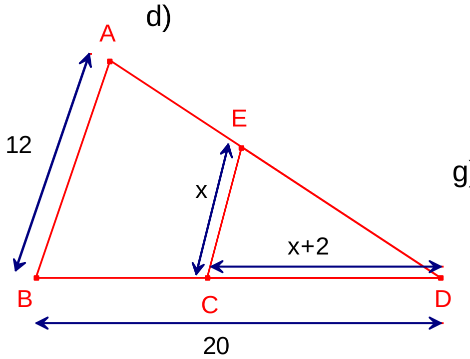
d)



e)



f)



g)

Propietat de la bisectriu d’un triangle.

Problema

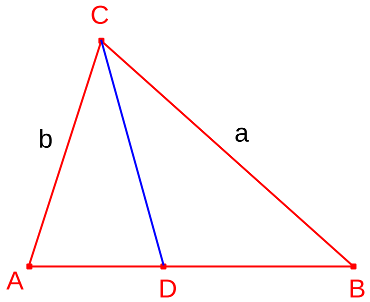
En un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ la diferència entre els costats b i a és 24 m.
La bisectriu de l’angle C divideix el costat c en dos parts, la contigua al costat b mesura 26 m, i l’altra 10m.
Calculeu els costats del triangle i classifiqueu-lo pels angles.
Temas de Grado Elemental, 1967. Problema 1517.

Solució:

Propietat de la bisectriu:

La bisectriu interior d’un triangle divideix el costat oposat en dues parts que són proporcionals als costats que amb ella concorren.

Siga $\overline{CD}$ la bisectriu de l’angle C, $\frac{\overline{BD}}{a} = \frac{\overline{AD}}{b}$.



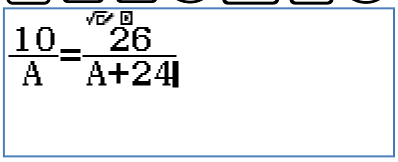
$c = \overline{BD} + \overline{AD} = 36$.

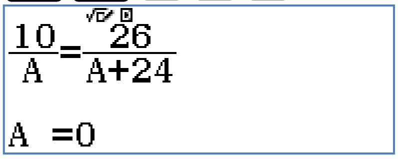
$b = a + 24$.

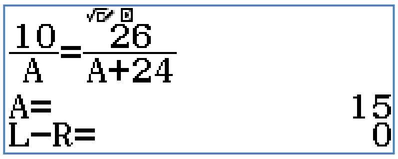
En el problema: $\frac{10}{a} = \frac{26}{b}$, $\frac{10}{a} = \frac{26}{a+24}$.

Resolem l’equació anterior:

Introduïm l’equació:



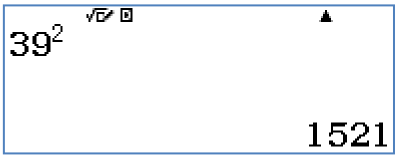


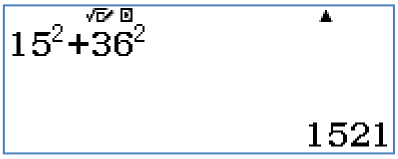


Aleshores, $a = 15$.

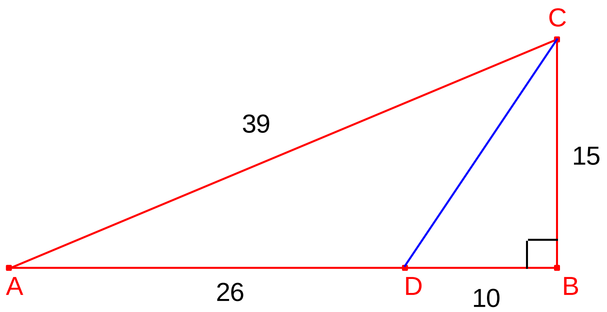
$b = a + 24 = 15 + 24 = 39$.

Per classificar-lo, aplicarem el teorema invers del teorema de Pitàgores:
El costat més gran és $b = 39$.
Calculem b^2 i $a^2 + c^2$:





Aleshores, $b^2 = a^2 + c^2 = 1521$, el triangle és rectangle $B = 90^o$.
El triangle és pitagòric.



Problema 1

Siga un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de perímetre 19.25 cm i el costat $c = 7\,cm$.
La bisectriu $\overline{BD}$ de l'angle B divideix el costat b en dos parts, $\overline{AD} = 2$.
Determineu la mesura del segment $\overline{CD}$.
Temas de Grado Elemental, 1967. Problema 1499.

Problema 2

Siga un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de perímetre 96 cm.
La bisectriu $\overline{AD}$ de l'angle A divideix el costat a en dos parts, $\overline{BD} = 18\,cm$, $\overline{CD} = 14\,cm$.
Determineu els costats del triangle.
Temas de Grado Elemental, 1967. Problema 1472.

Problema 3

Els costats del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ són $a = 8cm$, $b = 7cm$ i $c = 5cm$.
La bisectriu a l'angle A talla el costat oposat en el punt D.
Calculeu les mesures dels segments $\overline{BD}$ i $\overline{CD}$.
Temas de Grado Elemental, 1967. Proposta 32.

Geometria plana. Problema d'un triangle.

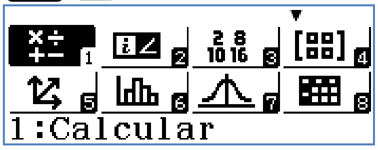
Exercici

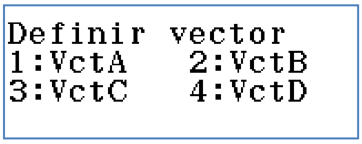
Els vèrtexs d'un triangle són $A(-2,1)$, $B(4,-1)$ i $C(2,5)$. Calculeu:

a) La mesura dels costats.
b) La mesura dels angles.
c) Els punts migs dels costats.
d) El baricentre.
e) La mesura de la mitjana $\overline{AD}$.

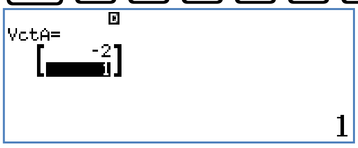
Solució:
Introduirem les coordenades dels vèrtexs com vectors.
Obriu el menú de vectors:

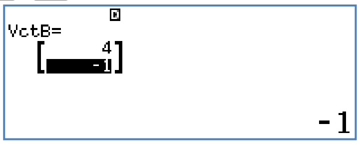
MENU 5

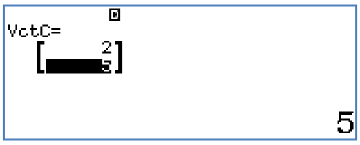




1 2 (−) 2 = 1 =
OPTN 1 2 2 4 = (−) 1 =
OPTN 1 3 2 2 = 5 =



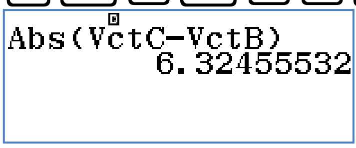


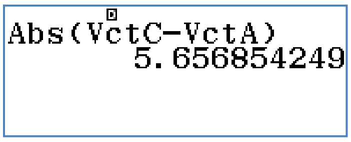


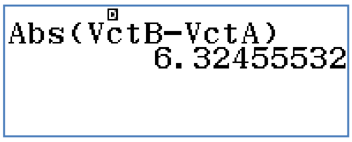
a) Calculeu la mesura dels costats.

$a=\left\|\overrightarrow{BC}\right\|$, $b=\left\|\overrightarrow{AC}\right\|$, $c=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$

AC SHIFT (OPTN 5 − OPTN 4) =
AC SHIFT (OPTN 5 − OPTN 3) =
AC SHIFT (OPTN 4 − OPTN 3) =



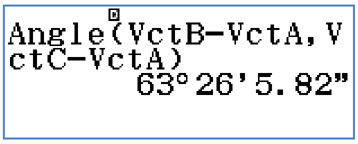


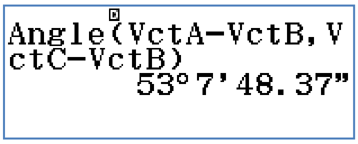


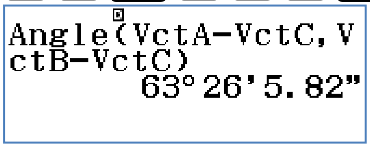
Aleshores, $a=6.32455532$, $b=5.656854249$, $c=6.32455532$.
Aleshores, el triangle és isòsceles.
b) Calculeu la mesura dels angles.

$A=\angle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$, $B=\angle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}$, $C=\angle\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}$.

AC OPTN ▼ 3 OPTN 4 − OPTN 3 SHIFT) OPTN 5 − OPTN 3) = °'''
AC OPTN ▼ 3 OPTN 3 − OPTN 4 SHIFT) OPTN 5 − OPTN 4) = °'''
AC OPTN ▼ 3 OPTN 3 − OPTN 5 SHIFT) OPTN 4 − OPTN 5) = °'''







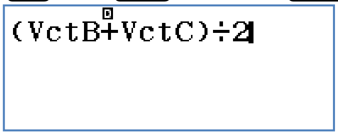
Aleshores, $A = 63^{o}\ 26'\ 5.82''$, $B = 53^{o}\ 7'\ 48.37''$. $C = 63^{o}\ 26'\ 5.82''$.

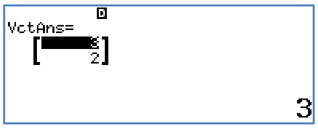
Notem que la suma dels tres angles és 180º.

c) Calculeu els punts migs dels costats.

Siga D el punt mig del costat $a = \overline{BC}$, E el punt mig del costat $b = \overline{AC}$, i F el punt mig del costat $c = \overline{AB}$.

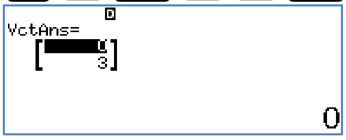
AC (OPTN 4 + OPTN 5) ÷ 2 =

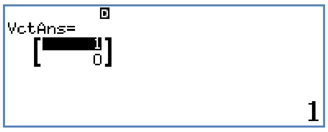




Anàlogament:

AC (OPTN 3 + OPTN 5) ÷ 2 =



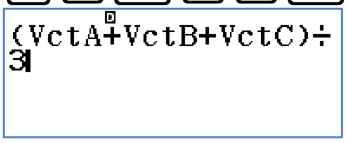


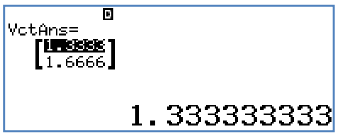
Les coordenades dels punts migs dels costats són: $D(3, 2)$, $E(0, 3)$, $F(1, 0)$.

d) Calculeu les coordenades del baricentre.

Les coordenades del baricentre són la tercera part de la suma de les coordenades dels vèrtexs.

AC (OPTN 3 + OPTN 4 + OPTN 5) ÷ 3 =



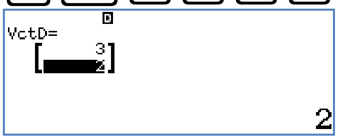


Les coordenades del baricentre són $G\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

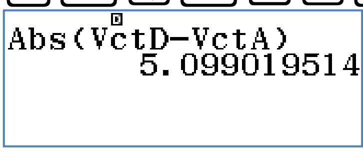
e) Calculeu la mesura de la mitjana $\overline{AD}$.

Definir el punt D:

AC OPTN 1 4 2 3 = 2 =

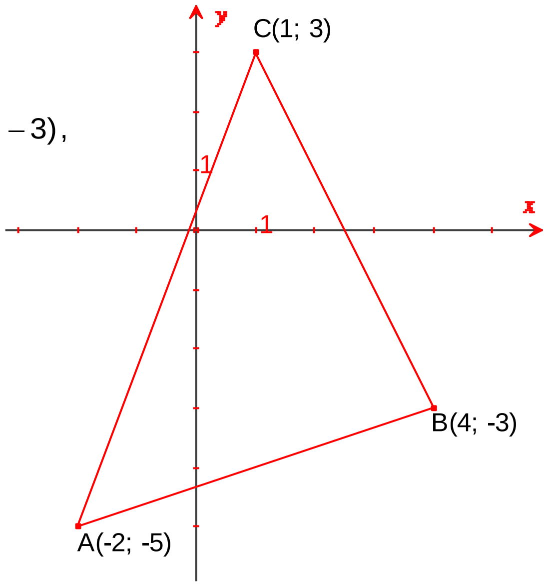


AC SHIFT (OPTN 6 − OPTN 3) =



$\overline{AD} \approx 5.10$. Podem comprovar que $\overline{AD} = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{4}$.

Àrea d’un triangle conegudes les coordenades dels vèrtexs.



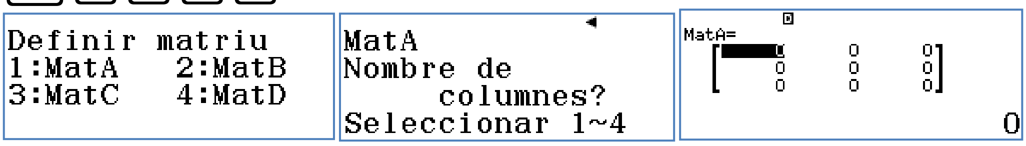
Problema:

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de vèrtexs els punts $A(-2,-5)$, $B(4,-3)$, $C(1,3)$.
Determineu la seua àrea.

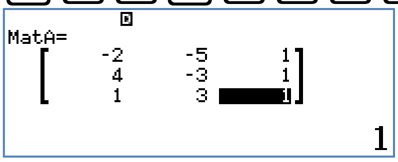
Solució 1:
Siguen els punts $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.

L’àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és $S_{ABC} = \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}$.

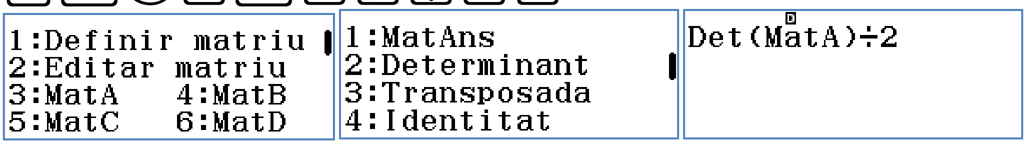
Obriu el menú de matrius:

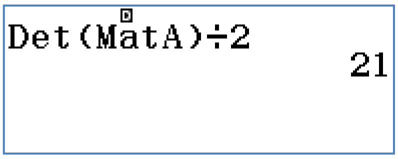


Introduïu els elements de la matriu:



Calculeu el determinant de la matriu:





L’àrea del triangle és $S_{ABC} = \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 21$.

Solució 2:

L'àrea del triangle $\overset{\triangle}{ABC}$ és $S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AC} \right\| \cdot \left\| \overrightarrow{AB} \right\| \cdot \sin A$.

Obriu el menú vectors.

```
Definir vector
1:VctA   2:VctB
3:VctC   4:VctD
```

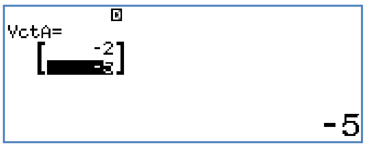
En tres vectors introduïu les coordenades dels vèrtexs.

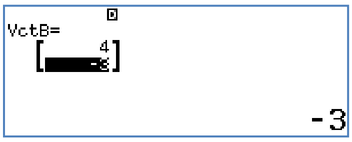
[MENU] [5]

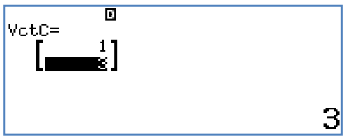
[1] [2] [(−)] [2] [=] [(−)] [5] [=] [OPTN] [2] [2] [2] [4] [=] [(−)] [3] [=] [OPTN] [2] [3] [2] [1] [=] [3] [=]

```
VctA
Dimensió?

Seleccionar 2~3
```







Calculem la mesura dels costat b, c:

[AC] [SHIFT] [(] [OPTN] [5] [−] [OPTN] [3] [)] [=] [STO] [°'''] [SHIFT] [(] [OPTN] [4] [−] [OPTN] [3] [)] [=] [STO] [x^{-1}]

```
Abs(VctC−VctA)
      8.544003745
Ans→B
      8.544003745
```

```
Abs(VctB−VctA)
      6.32455532
Ans→C
      6.32455532
```

Calculeu l'angle A:

[OPTN] [▼] [3] [OPTN] [5] [−] [OPTN] [3] [SHIFT] [)] [OPTN] [4] [−] [OPTN] [3] [)] [=] [STO] [(−)] [AC]

```
Angle(VctC−VctA,V
ctB−VctA)
```

```
ctB−VctA)
      51.00900596
Ans→A
      51.00900596
```

Calculem l'àrea:

[ALPHA] [°'''] [×] [ALPHA] [x^{-1}] [×] [sen] [ALPHA] [(−)] [)] [÷] [2] [=]

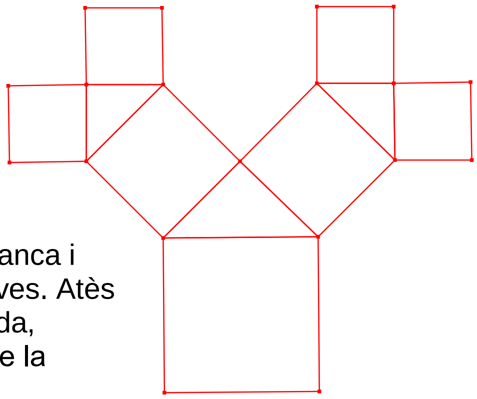
```
B×C×sen(A)÷2
```

```
B×C×sen(A)÷2
               21
```

L'àrea del triangle és:

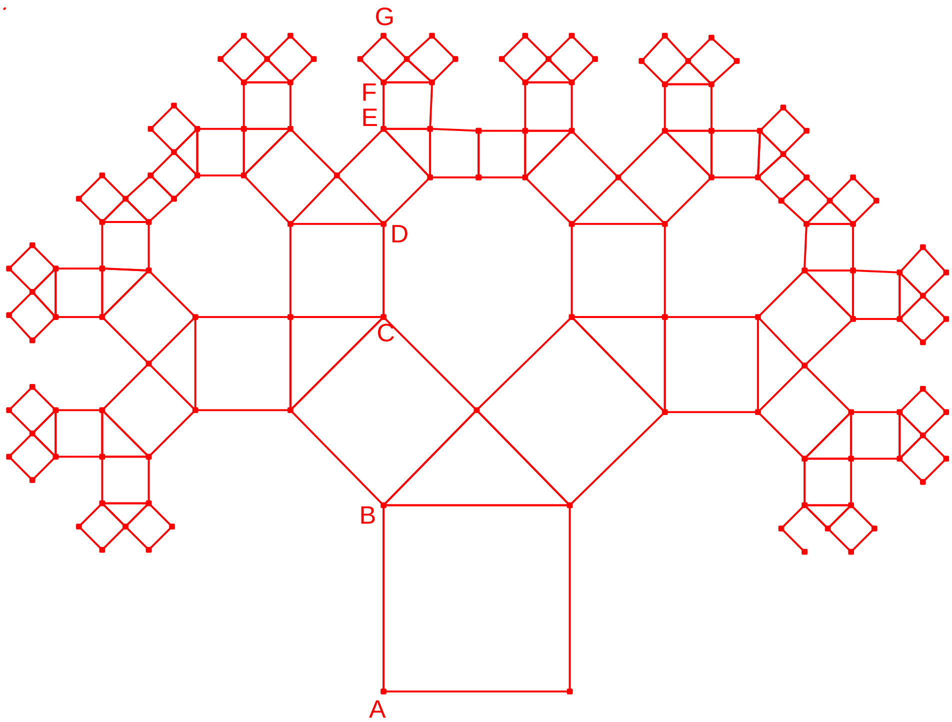
$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A = 21.$

Altura arbre pitagòric.



El creixement d'un arbre de Pitàgores té el patró següent:
En el primer any, l'arbre creix el seu tronc, que és un quadrat. En el segon any, un vèrtex d'un triangle rectangle i isòsceles creix a la part superior, tal que la hipotenusa és la part superior del quadrat, i llavors les dues primeres branques, també de forma quadrada, creixen des dels catets del triangle. Llavors aquest patró es repeteix cada any, és a dir, un triangle rectangle isòsceles creix en la part superior de cada branca i les seues bases creixen dues branques de forma quadrada noves. Atès que el tronc (és a dir, el primer quadrat) és de 1 metre d'amplada, calculeu l'altura de l'arbre al final de 4 anys i 16 anys. L'arbre de la imatge té tres anys.
Generalitzeu el resultat.

Solució:



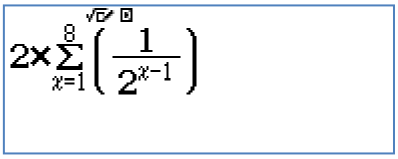
Hem dibuixat l'arbre amb 6 anys de vida.
L'altura al cap de quatre anys de vida és igual a la mesura del segment $\overline{AE}$.
Les longituds que creix l'arbre cada anys és:
$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, ...
$$1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, ...$$
Siga $n = 1, 2, 3, 4, ...$ els anys transcorreguts.
L'altura de l'arbre pitagòric a cada any és:

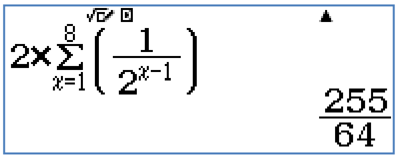
$$H_{2n-1} = 2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots\dots\dots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{1}{2^{n-1}} \cdot \quad H_{2n} = 2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots\dots\dots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

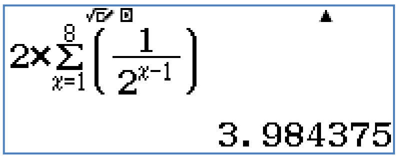
$$H_4 = 2\left(1+\frac{1}{2}\right) = 3m \cdot$$

$$H_{16} = H_{2\cdot 8} = 2\left(\sum_{x=1}^{8}\frac{1}{2^{x-1}}\right) \cdot$$

Utilitzarem la funció de sumatoris de la calculadora Casio 991 classwiz, per calcular l’altura al cap de 16 anys:







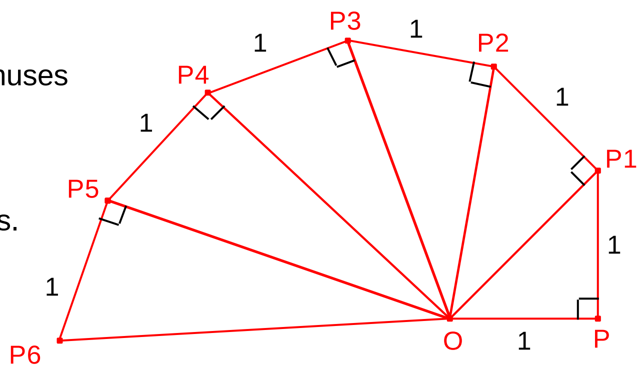
L’altura aproximada és $3.98m$.

Teorema de Pitàgores i successions.

Problema 1:

En la figura, tots els triangles són rectangles en els vèrtexs $P, P_1, P_2, P_3, \ldots$.

$1 = \overline{OP} = \overline{PP_1} = \overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3} = \ldots = \overline{P_iP_{i+1}}$.



a) Calculeu les mesures de les 10 primeres hipotenuses $\overline{OP_1}, \overline{OP_2}, \overline{OP_3}, \overline{OP_4}, \ldots$ dels triangles.

b) Calculeu la mesura de la hipotenusa $\overline{OP_n}$.

c) Calculeu la suma de les 10 primeres hipotenuses.

d) Calculeu la suma de les àrees dels 10 primers triangles.

Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPP_1}$: $\overline{OP_1} = \sqrt{\overline{OP}^2 + \overline{PP_1}^2}$ -

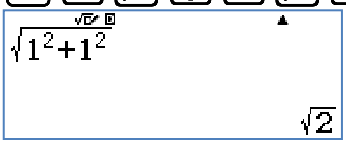
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OP_1P_2}$: $\overline{OP_2} = \sqrt{\overline{OP_1}^2 + \overline{P_1P_2}^2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OP_2P_3}$: $\overline{OP_3} = \sqrt{\overline{OP_2}^2 + \overline{P_2P_3}^2}$.

a)

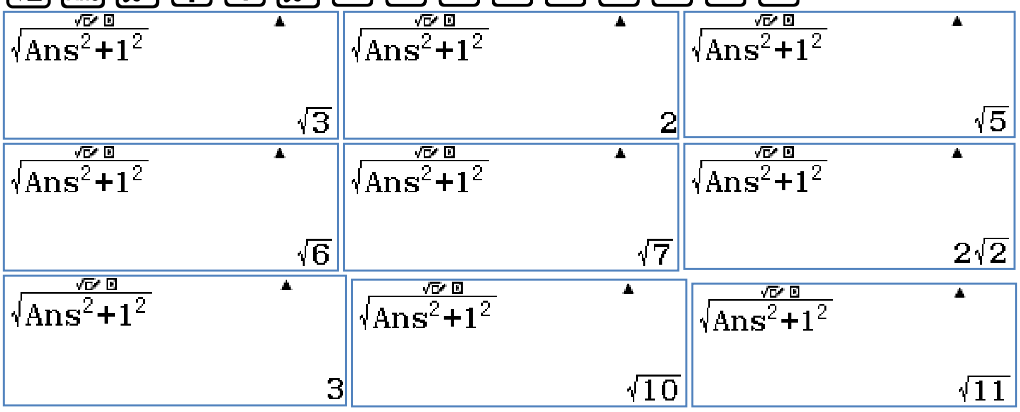
Utilitzarem la funció Ans de la calculadora.

√■ 1 x² + 1 x² =



$\overline{OP_1} = \sqrt{2}$.

√■ Ans x² + 1 x² = = = = = = = = =



Les mesures de les primeres hipotenuses són:

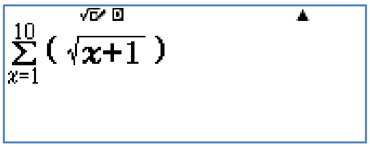
$\overline{OP_2} = \sqrt{3}, \overline{OP_3} = \sqrt{4} = 2, \overline{OP_4} = \sqrt{5}, \overline{OP_5} = \sqrt{6}, \overline{OP_6} = \sqrt{7}, \overline{OP_7} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \overline{OP_8} = \sqrt{9} = 3$

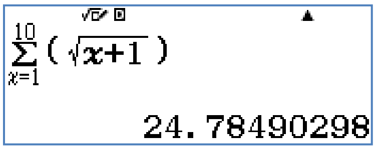
b)

$\overline{OP_n} = \sqrt{n+1}$. Es pot provar aquesta conjectura per inducció completa.

c)

Utilitzarem la funció suma de sèries finites





La suma és aproximadament, 24.78490298.

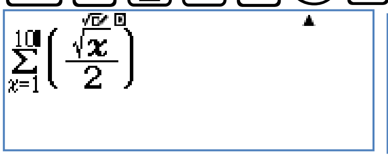
d)

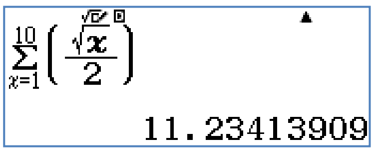
Les àrees dels primers triangles són:

$S_1 = \frac{1 \cdot 1}{2}$, $S_2 = \frac{\sqrt{2} \cdot 1}{2}$, $S_3 = \frac{\sqrt{3} \cdot 1}{2}$, $S_4 = \frac{\sqrt{4} \cdot 1}{2}$, $S_5 = \frac{\sqrt{5} \cdot 1}{2}$, ...

$S_n = \frac{\sqrt{n}}{2}$.

Per fer la suma de les àrees utilitzarem la funció de sumes finites de la calculadora.





La suma és aproximadament 11.23413909.

Problema 2:

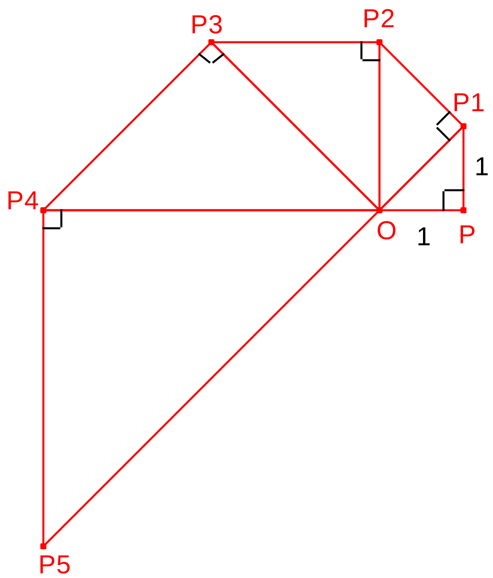
En la figura, tots els triangles són rectangles en els vèrtexs $P, P_1. P_2, P_3$,.... i isòsceles. $1 = \overline{OP} = \overline{PP_1}$.

a) Calculeu les mesures de les 10 primeres hipotenuses $\overline{OP_1}, \overline{OP_2}, \overline{OP_3}, \overline{OP_4}$,,... dels triangles.

b) Calculeu la mesura de la hipotenusa $\overline{OP_n}$.

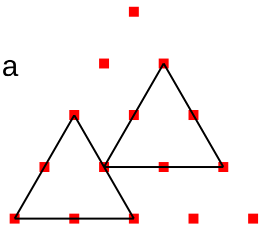
c) Calculeu la suma de les 10 primeres hipotenuses.

d) Calculeu la suma de les àrees dels 10 primers triangles.

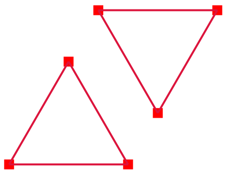


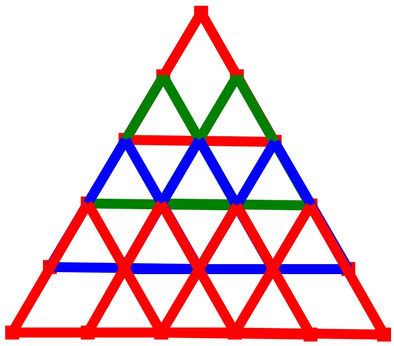
Graella isomètrica. Nombre de triangles

Siga una graella isomètrica (triangles equilàters) de claus a una distància 1 cm d'un a l'altre com indica l'esquema.
Amb elàstics es formen triangles equilàters de 2 cm de costat. (en la graella s'han dibuixat dos triangles).
Quants triangles equilàters diferents són possibles si la graella té 100 claus per costat del triangle equilàter.

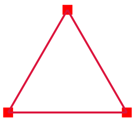


Solució:
Hi ha dos formes distintes de presentar-se els triangles:

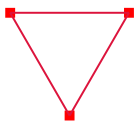




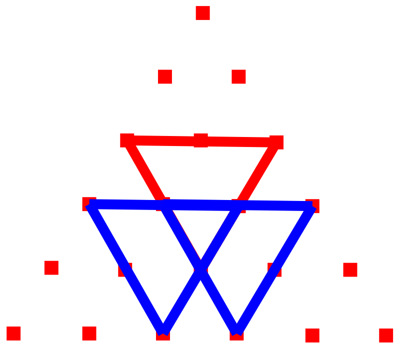
Suposem que hi ha 6 claus per costat.



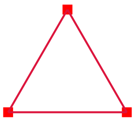
En la posició hi ha:
$1+2+3+4$ triangles.



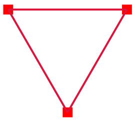
En la posició hi ha:
$1+2$ triangles.
En total hi ha:
$T_6=(1+2+3+4)+(1+2))$.



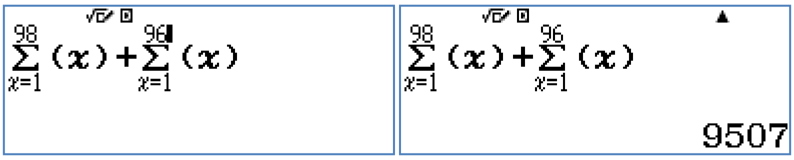
Suposem que hi ha 100 claus per costat.



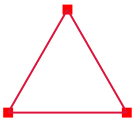
En la posició hi ha:
$1+2+3+4+\dots\dots\dots+98$ triangles.



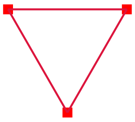
En la posició hi ha:
$1+2+3+\dots\dots\dots+96$ triangles.
En total hi ha:
$T_n=(1+2+3+\dots\dots+98)+(1+2+3+\dots\dots+96)$.
Amb la calculadora Classwiz 991.
Utilitzarem la funció de sumes finites.



Es posen formar 9507 triangles diferents.
Generalització:
Suposem que hi ha n claus per costat.



En la posició hi ha:
$1+2+3+\dots\dots+(n-2)$ triangles.



En la posició hi ha:
$1+2+3+\dots\dots+(n-4)$ triangles
En total hi ha:
$T_n=(1+2+3+\dots\dots+(n-2))+(1+2+3+\dots\dots+(n-4))$.
Sumant els termes de les dues progressions aritmètiques:

$$T_n=\left(\frac{1+n-2}{2}(n-2)\right)+\left(\frac{1+n-4}{2}(n-4)\right).$$

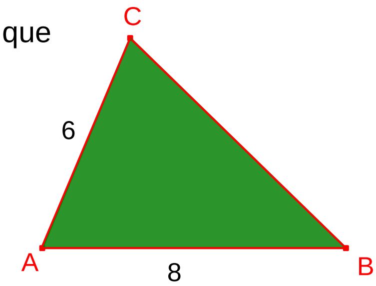
$$T_n=\left(\frac{n^2-3n+2}{2}\right)+\left(\frac{n^2-7n+12}{2}\right).$$

$T_n=n^2-5n+7$ on n és el nombre de claus per costat.

Funció àrea d'un triangle. Àrea màxima

Determineu el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de costats $\overline{AB} = 8$ cm, $\overline{AC} = 6$ cm que té àrea màxima.

En aquest cas, calculeu el valor del costat $\overline{BC}$.



Solució 1:

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ en funció de l'angle A és:

$S_{ABC} = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A$. $S_{ABC} = \frac{1}{2}6 \cdot 8 \sin A$.

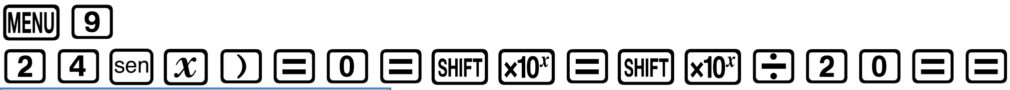
$S(x) = 24 \cdot \sin x$.

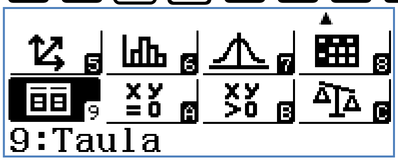
Construïm la seua taula amb la calculadora Casio 991.

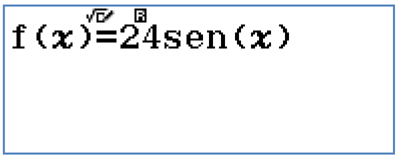
Notem que els valors de x són nombres reals, aleshores, les mesures seran radians.

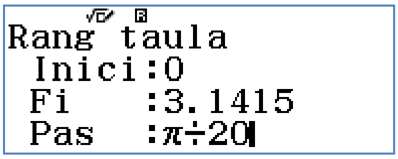
$S(x) = 24 \cdot \sin x$, $0 \le x \le \pi$.

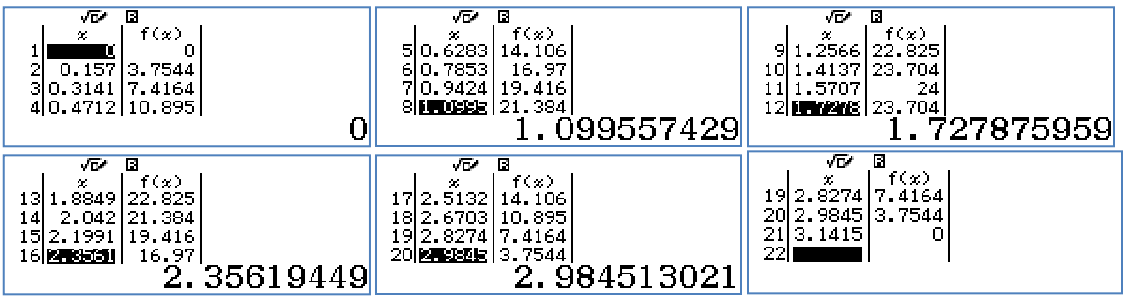
L'inici $x = 0$. El final $x = \pi$, el pas $\frac{\pi}{20}$.











Observant la taula notem que el valor màxim s'assoleix quan $x = 1.5707$ i l'àrea màxima és 24 cm^2.

Dibuixem la funció utilitzant el codi QR de la calculadora 991:

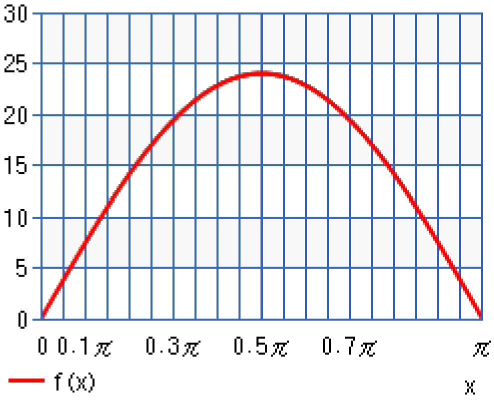
SHIFT OPTN

Mirant la gràfica el màxim s'assoleix quan:

$x = \frac{\pi}{2}$ és a dir, quan el triangle és rectangle.

Aplicant el teorema de Pitàgores, la hipotenusa és $a = 10$ cm.

L'àrea màxima és $24\ \text{cm}^2$.



Solució 2:

Utilitzant la fórmula d'Heró l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{4}.$$

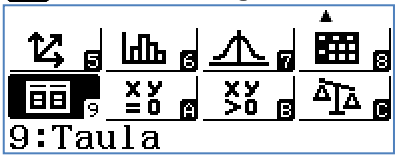
$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{(a+14)(-a+14)(a-2)(a+2)}}{2}.\quad a < 8+6 = 14,\ a+6 > 8.$$

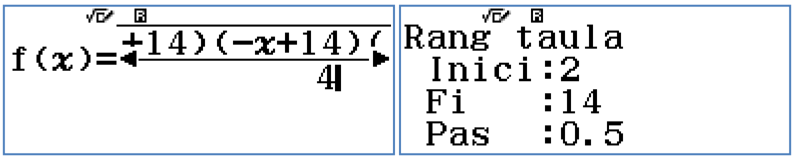
$$S(x) = \frac{\sqrt{(x+14)(-x+14)(x-2)(x+2)}}{2},\quad 2 < x < 14.$$

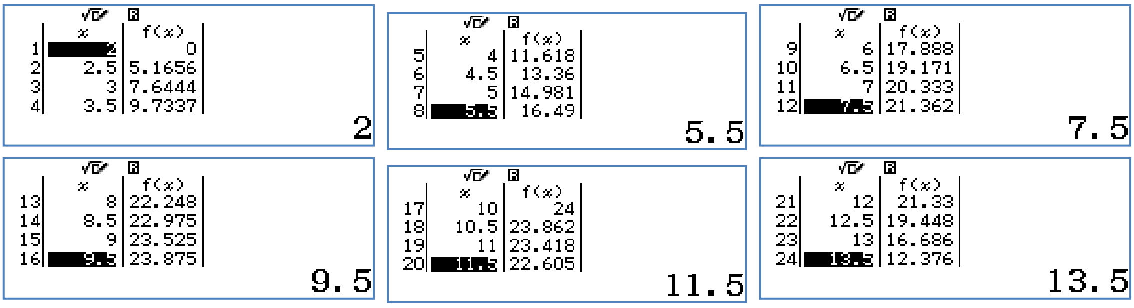
Construïm la seua taula amb la calculadora Casio 991.

MENU 9

▦ √■ (x + 1 4) (− x + 1 4) (x − 2) (x + 2) ▼ 4 = 2 = 1 4 = 0 . 5 = =





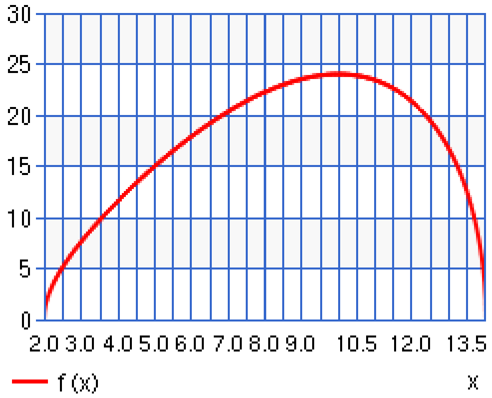


Observant la taula notem que el valor màxim s'assoleix quan $x = 10$ i l'àrea màxima és $24\ \text{cm}^2$.

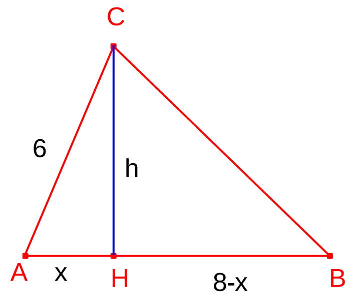
Dibuixem la funció utilitzant el codi QR de la calculadora 991:

SHIFT OPTN

Mirant la gràfica el màxim s'assoleix quan:
$x = 10$ és a dir, quan el triangle és rectangle, ja que compleix el teorema invers de Pitàgores.
L'àrea màxima és $24\ cm^2$.



Solució 3:
Siga $\overline{CH} = h$ altura del triangle, $\overline{AH} = x$, $\overline{BH} = 8 - x$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AHC}$:
$6^2 - x^2 = h^2$, $h = \sqrt{36 - x^2}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

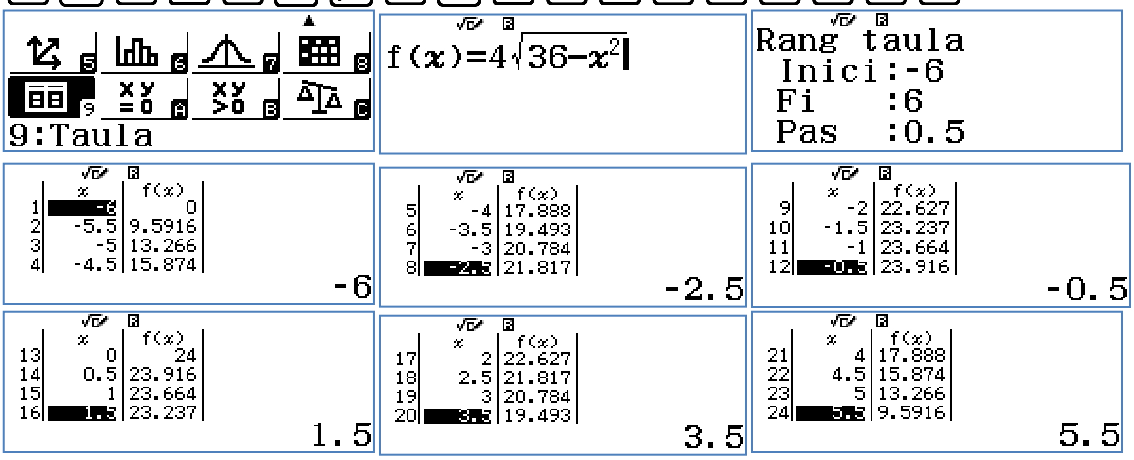
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} 8h = 4\sqrt{36 - x^2}.$$

$S(x) = 4\sqrt{36 - x^2}$, $-6 < x < 6$.

Construïm la seua taula amb la calculadora Casio 991.

MENU 9

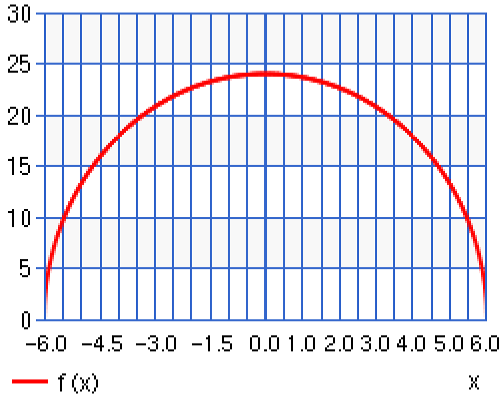
4 √■ 3 6 − 𝑥 𝑥² = (−) 6 = 6 = 0 • 5 = =



Observant la taula notem que el valor màxim s'assoleix quan $x = 0$ i l'àrea màxima és $24\ cm^2$.

Dibuixem la funció utilitzant el codi QR de la calculadora 991:

SHIFT OPTN



Mirant la gràfica el màxim s’assoleix quan: $x = 0$ és a dir, quan el triangle és rectangle. Aplicant el teorema de Pitàgores, la hipotenusa és $a = 10$ cm.

L’àrea màxima és 24 cm^2.

Bibliografia:

GÚSIEV, V. i altres, (1989). *Prácticas para resolver problemas matemáticos. Geometría.* Editorial Mir. Moscou.

SHARIGUIN, I.(1986). *Problemas de geometría. Planimetría*. Editorial Mir. Moscou.

AA.VV. (1998). *Matemáticas Recurrentes.* Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 13. Madrid.

HERNÁNDEZ GÓMEZ,J. DONAIRE MORENO,J.J. (2006). *Concurso intercentres de matemáticas*. Ed. Nivola. Madrid.

HERNÁNDEZ GÓMEZ,J. DONAIRE MORENO,J.J. (2007). *Desafíos de geometría 1.* Nivola. Madrid.

HERNÁNDEZ GÓMEZ,J. DONAIRE MORENO,J.J. (2008). *Desafíos de geometría 2*. Nivola. Madrid.

LIDSKI V. i altres. (1983) *Problemas de matemáticas elementales.* Ed Mir. Moscou.

COXETER, H.S.M. (1994). *Retorno a la geometría.* Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 1. Madrid.

Mathematical Association of America. (1996). *Concursos de matemáticas. Geometría*. Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 8. Madrid.

Mathematical Association of America. (1996). *Concursos de matemáticas. Algebra, Teoría de Números, Trigonometría*. Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 9 y 10. Madrid.

AA.VV. *Competencias Matemáticas en Estados unidos*. Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 11. Madrid. 1996.

GARDINER, T. (1996). *Mathematical Challenge.* Ed Cambridge University Press.

GARDINER, T. (1997). *More Mathematical Challenges.* Ed Cambridge University Press.

GARDINER, T. (2002). *Senior Mathematical Challenge.* Ed Cambridge University Press.

POSAMENTIER, A.S., SALKIND, C.T. (1988). *Challenging Problems in Geometry.*Dover Publications, inc. NY.

HALMOS, PAUL. (2000). *Problèmes pour mathématiciens petits et grands.* Ed. Cassini. París.

NELSEN, R.B. (2001) *Demostraciones sin palabras.* Ed. Proyecto Sur.