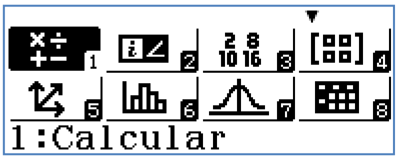
Problemas de geometría para secundaria con calculadora

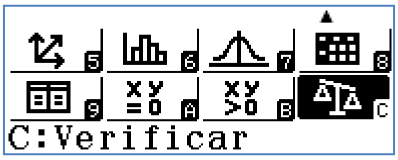
Ricard Peiró i Estruch

Introducción

La calculadora Casio fx 570/991 SPX iberia Classwiz permite probar la conjetura de un problema, resolver ecuaciones. Estos procesos llevan implícitos, procedimientos de análisis y modelización comprobación, experimentación, e investigación, procedimientos que motivan la actividad constructiva del alumno.
La introducción de la calculadora en el aula, comporta un gran cambio metodológico. Permite el análisis de los resultados agilizando los procesos de cálculo y ayudando a la visualización de situaciones difíciles de abstraer a partir de una expresión verbal o de la pizarra.

Novedades de la nueva calculadora Casio fx 570/991 SPX iberia Classwiz:
Mejor resolución de pantalla. Mas líneas de pantalla.
Menús sencillos e intuitivos





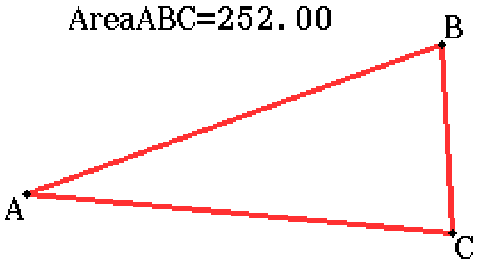
Idiomas: Catalán, español, euskera y portugués.

Resolución de ecuaciones de grado 4.
Hoja de cálculo.
Cálculo de determinantes de orden 4.
Tabla de funciones con posibilidad de dos funciones.
Menú de verificación.
Resolución de inecuaciones de 2º grado.
Generador de código QR para conectarse con la página web de Casio.y poder representar gráficas de funciones y estadística.
Emulador para el ordenador.
Prácticamente todas las funciones de la calculadora se han mejorado. (división natural, factorización, mcd, mcm,…)

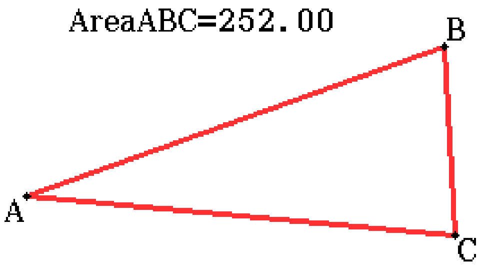
Presentamos unos problemas aritméticos, para resolverlos con la nueva calculadora. Estas fichas de trabajo se han llevado al aula para que los alumnos pudieran aprender el uso de la calculadora.

Problemas

Problema 1
Calcular el área del triángulo de lados $a = 15$, $b = 34$, $c = 35$.



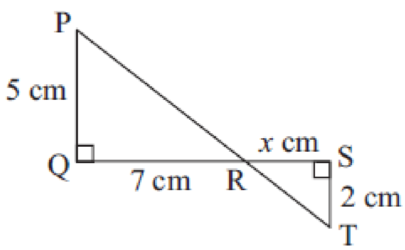
Problema 2
Resolver el triángulo de lados $a = 15$, $b = 34$, $c = 35$.



Problema 3
Los vértices de un triángulo son $A(-2,1)$, $B(4,-1)$ y $C(2,5)$. Calcular:

a) La medida de los lados.
b) La medida de los ángulos.
c) Los puntos medios de los lados.
d) El baricentro.
e) La medida de la mediana $\overline{AD}$.

Problema 4
Determinar el valor de x en la siguiente figura:

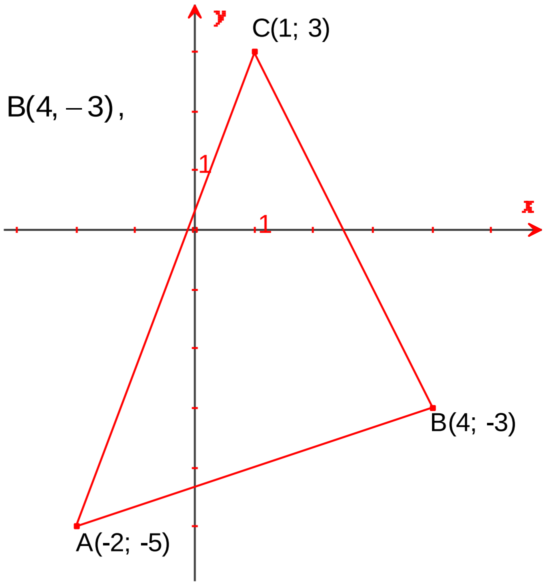


Problema 5

En un triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ la diferencia entre los lados b y a es 24 m.
La bisectriz del ángulo C divide el lado c en dos partes, la contigua al lado b mide 26m, y la otra 10m.
Calcular los lados del triángulo y clasificarlo por los ángulos.
Temas de Grado Elemental, 1967. Problema 1517.

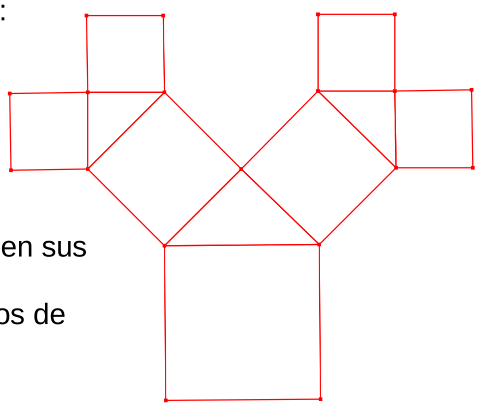
Problema 6

Sea el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ de vértices los puntos $A(-2,-5)$, $B(4,-3)$, $C(1,3)$.
Determinar el área.



Problema 7

El crecimiento de un árbol de Pitágoras tiene la siguiente forma:
En el primer año, el árbol crece su tronco, que es un cuadrado.
En el segundo año, un triángulo rectángulo isósceles crece en la parte superior, tal que su hipotenusa es el lado superior del cuadrado, y luego las dos primeras ramas, también tienen forma cuadrada, crecen sobre los catetos del triángulo. Este patrón se repite cada año, es decir, un triángulo rectángulo isósceles crece en la parte superior de cada rama y en sus catetos crecen dos nuevos cuadrados.
Dado que el tronco (es decir, el primer cuadrado) es de 1 metros de ancho, calcular la altura del árbol al final de 4 y 16 años.
El árbol de la imagen tiene tres años.
Generalizar el resultado



Problema 8

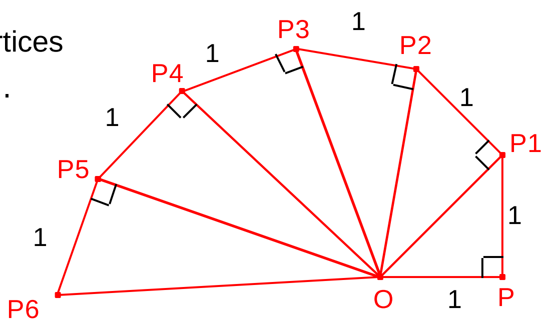
En la figura, todos los triángulos son rectángulo en los vértices $P, P_1, P_2, P_3, \ldots$. $1 = \overline{OP} = \overline{PP_1} = \overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3} = \ldots = \overline{P_iP_{i+1}}$.

a) Calcular las medidas de las 10 primeras hipotenusas $\overline{OP_1}, \overline{OP_2}, \overline{OP_3}, \overline{OP_4}, \ldots$ de los triángulos.

b) Calcular la medida de la hipotenusa $\overline{OP_n}$.

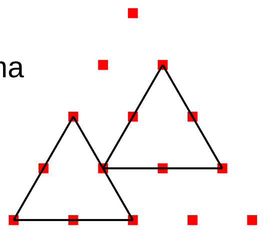
c) Calcular la suma de las 10 primeras hipotenusas.

d) Calcular la suma de las áreas de los 10 primeros triángulos.



Problema 9

Sea una trama isométrica (triángulos equiláteros) de clavos a una Distancia 1 cm de uno a otro como indica la figura (5 clavos de lado).
Con elásticos se forman triángulos equiláteros de 2 cm de lado. (en la trama se han dibujado dos triángulos).
¿Cuántos triángulos equiláteros diferentes son posibles si la trama tiene 100 clavos por lado del triángulo equilátero.



Problema 10

Determinar el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ de lados $\overline{AB} = 8\text{ cm}$, $\overline{AC} = 6\text{ cm}$ que tiene área máxima.
En este caso, calcular el valor del lado $\overline{BC}$.

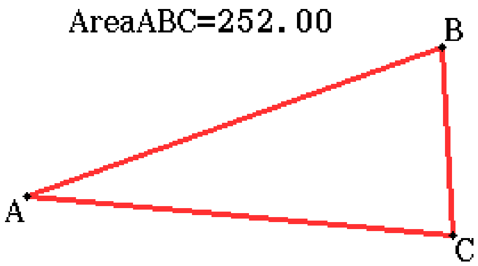
Área de un triángulo. Fórmula de Herón.

Dado un triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ de lados conocidos $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$, su área es:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{4}$$ que se llama fórmula de Herón.

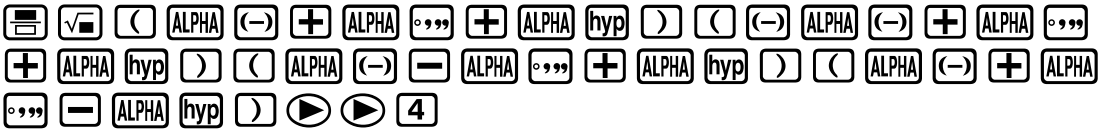
Ejercicio:

Calcular el área del triángulo de lados $a = 15$, $b = 34$, $c = 35$.



Solución:

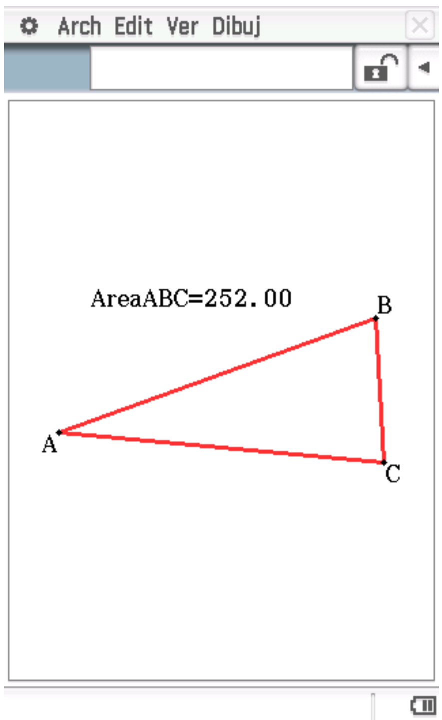
Introducir la fórmula en la calculadora:



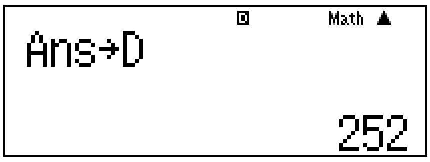
Una vez introducida la fórmula podemos calcular el área de cualquier triángulo con la calculadora.

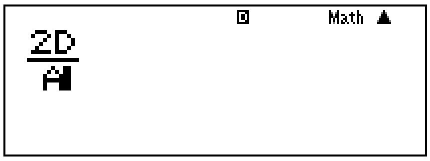
Ahora podemos calcular las tres alturas del triángulo.

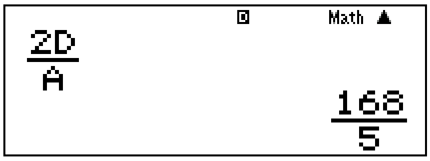
$$h_a = \frac{2 \cdot S_{ABC}}{a}, \quad h_b = \frac{2 \cdot S_{ABC}}{b}, \quad h_c = \frac{2 \cdot S_{ABC}}{c}.$$



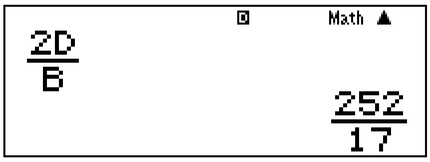
Guardar el valor del área en la variable D

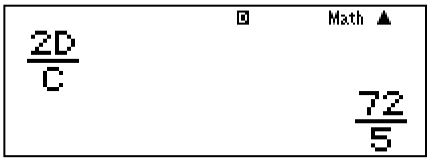






Análogamente:





Nota: Un triángulo es de Herón si no es rectángulo y sus lados y área son números naturales y no se puede dividir en dos triángulos rectángulos con lados naturales.

Ejemplos de triángulos de Herón:

a) $a = 34, b = 35, c = 39$.

b) $a = 39, b = 58, c = 95$.

c) $a = 34, b = 55, c = 87$.

Calcular el área de los triángulos anteriores.

Resolución de un triángulo conocidos tres lados. Teorema del coseno

Teorema del coseno

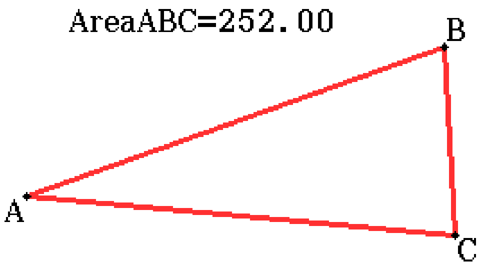
Dado un triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ de lados conocidos $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A.\quad A = \arccos\left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}\right).$$

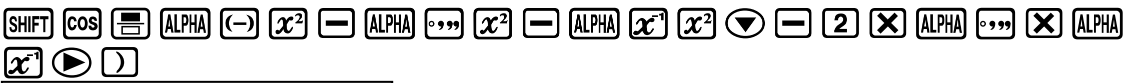
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B.\quad B = \arccos\left(\frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac}\right).$$

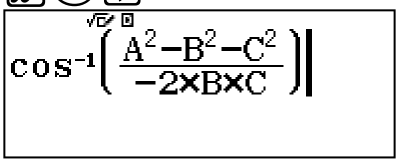
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.\quad C = \arccos\left(\frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab}\right).$$

Ejemplo:
Resolver el triángulo de lados $a = 15$, $b = 34$, $c = 35$.

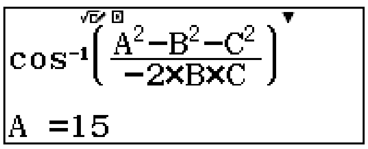


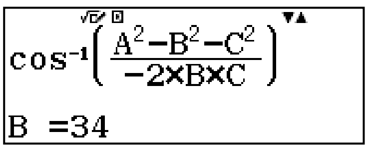
Solución:
Introducir la fórmula en la calculadora:

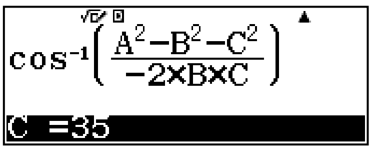


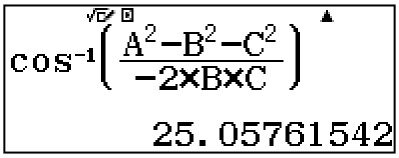


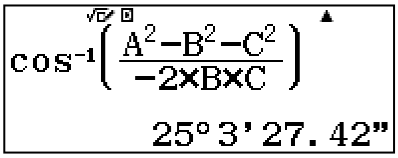
Calcular el ángulo A:







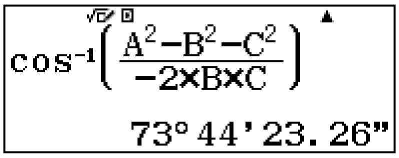




A = 25º 3' 27.42" .

Calcular el ángulo B:

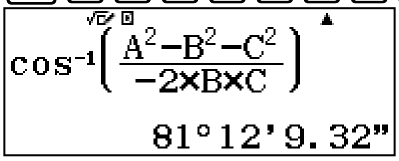
CALC 3 4 = 1 5 = 3 5 = = °'"



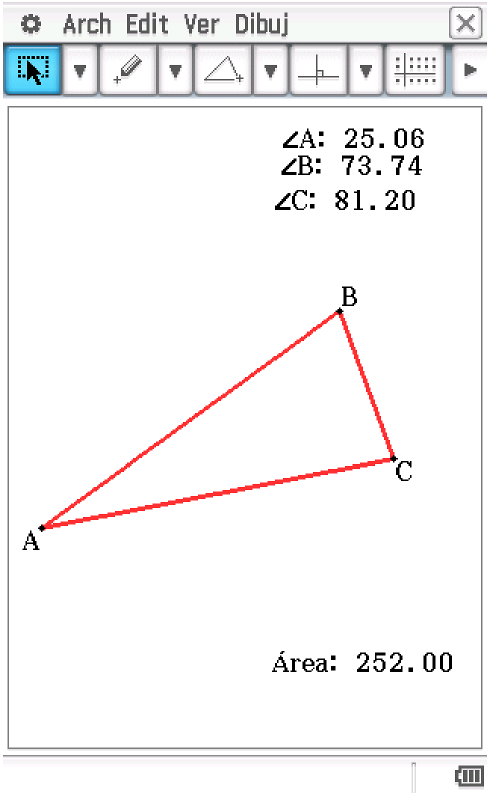
B = 73º 44' 23.26"

Calcular el ángulo C:

CALC 3 5 = 1 5 = 3 4 = = °'"



C = 81º 12' 9.32" .



Ejercicios

Resolver los siguientes triángulos:

a) $a = 15cm, b = 25cm, c = 35cm$.

b) $a = 7cm, b = 8cm, c = 9cm$.

c) $a = 15cm, b = 15cm, c = 20cm$.

d) $a = 5cm, b = 12cm, c = 13cm$.

Geometría plana. Problema de un triángulo.

Ejercicio

Los vértices de un triángulo son $A(-2,1)$, $B(4,-1)$ y $C(2,5)$. Calcular:

a) La medida de los lados.

b) La medida de los ángulos.

c) Los puntos medios de los lados.

d) El baricentro.

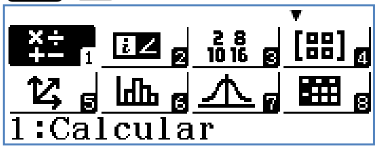
e) La medida de la mediana $\overline{AD}$.

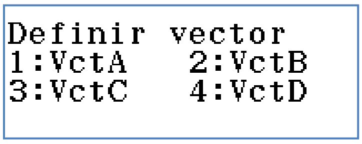
Solución:

Introduciremos las coordenadas de los vértices como vectores.

Abrir el menú de vectores:

MENU 5

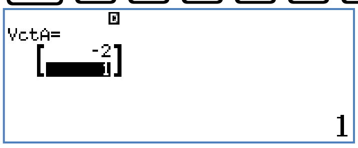


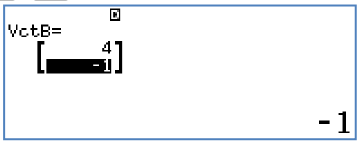


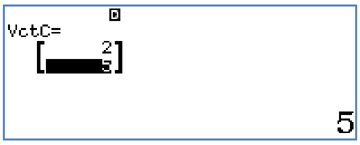
1 2 (−) 2 = 1 =

OPTN 1 2 2 4 = (−) 1 =

OPTN 1 3 2 2 = 5 =







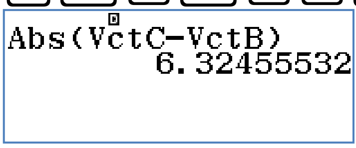
a) Calcular la medida de los lados.

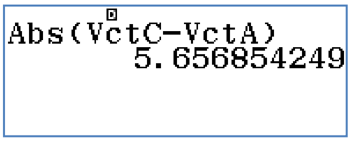
$a = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$, $b = \left\|\overrightarrow{AC}\right\|$, $c = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$

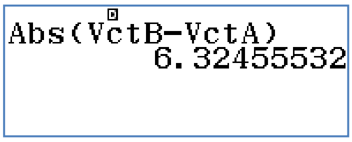
AC SHIFT (OPTN 5 − OPTN 4) =

AC SHIFT (OPTN 5 − OPTN 3) =

AC SHIFT (OPTN 4 − OPTN 3) =







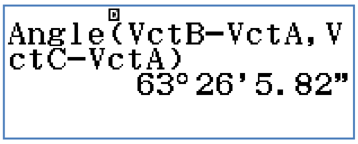
Entonces, $a = 6.32455532$, $b = 5.656854249$, $c = 6.32455532$.

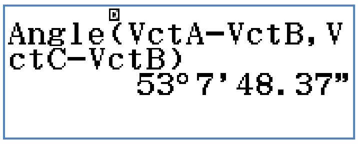
Entonces, el triángulo es isósceles.

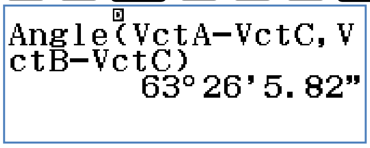
b) Calcular la medida de los ángulos.

$A = \angle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$, $B = \angle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}$, $C = \angle\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}$.

AC OPTN ▼ 3 OPTN 4 − OPTN 3 SHIFT) OPTN 5 − OPTN 3) = °'"
AC OPTN ▼ 3 OPTN 3 − OPTN 4 SHIFT) OPTN 5 − OPTN 4) = °'"
AC OPTN ▼ 3 OPTN 3 − OPTN 5 SHIFT) OPTN 4 − OPTN 5) = °'"







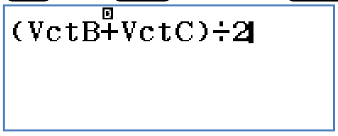
Entonces, $A = 63^{o}\ 26'\ 5.82''$, $B = 53^{o}\ 7'\ 48.37''$. $C = 63^{o}\ 26'\ 5.82''$.

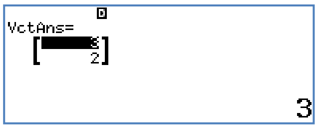
Notemos que la suma de los tres ángulos es 180º.

c) Calcular los puntos medios de los lados.

Sean D el punto medio del lado $a = \overline{BC}$, E el punto medio del lado $b = \overline{AC}$, y F el punto medio del lado $c = \overline{AB}$.

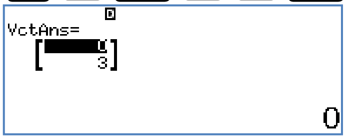
AC (OPTN 4 + OPTN 5) ÷ 2 =

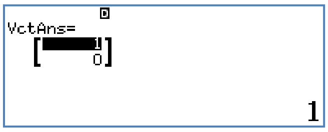




Análogamente:

AC (OPTN 3 + OPTN 5) ÷ 2 =



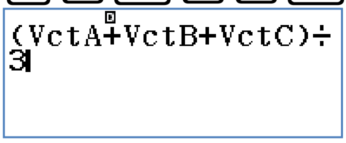


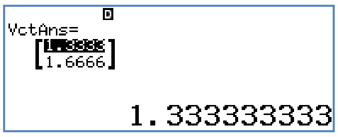
Las coordenadas de los puntos medios de los lados son: $D(3, 2)$, $E(0, 3)$, $F(1, 0)$.

d) Calcular las coordenadas del baricentro.

Las coordenadas del baricentro son la tercera parte de la suma de las coordenadas de los vértices.

AC (OPTN 3 + OPTN 4 + OPTN 5) ÷ 3 =



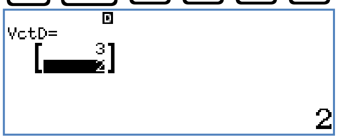


Las coordenadas del baricentro son $G\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

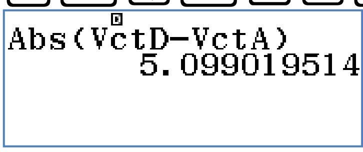
e) Calcular la medida de la mediana $\overline{AD}$.

Definir el punto D:

AC OPTN 1 4 2 3 = 2 =



AC SHIFT (OPTN 6 − OPTN 3) =

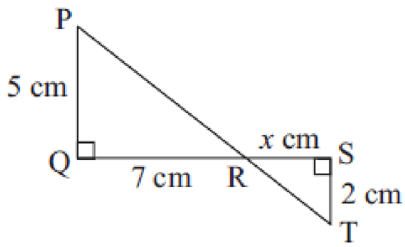


$\overline{AD} \approx 5.10$. Comprobar que $\overline{AD} = \dfrac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{4}$.

Teorema de Tales.

Problema 1

Determinar el valor de x en la siguiente figura:



Solución:

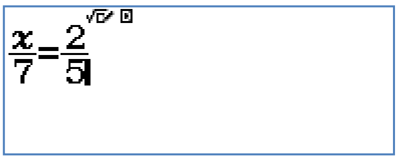
Los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{PQR}$, $\overset{\Delta}{TSR}$ son semejantes ya que los lados $\overline{ST}$, $\overline{PQ}$ son paralelos por ser ambos perpendiculares a $\overline{QS}$.

Aplicando el teorema de Tales: $\dfrac{\overline{RS}}{\overline{RQ}} = \dfrac{\overline{ST}}{\overline{QP}}$.

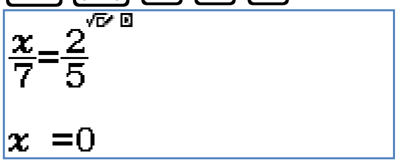
$\dfrac{x}{7} = \dfrac{2}{5}$.

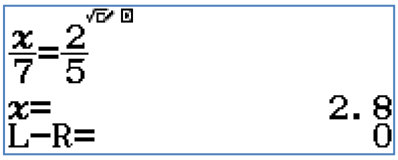
Podemos resolver la ecuación con la calculadora:

Introducimos la ecuación:

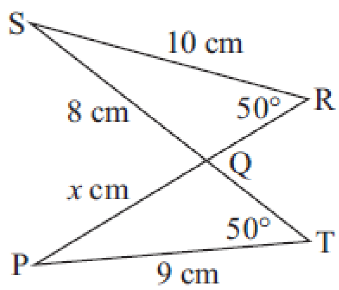


Resolvemos la ecuación:





El valor de x es $x = 2.8\text{cm}$.



Problema 2:

Determinar el valor de x en la siguiente figura:

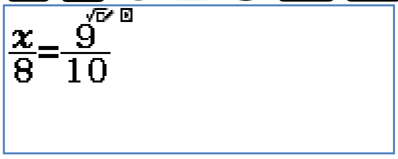
Solución:

Los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{PTQ}$, $\overset{\Delta}{SRQ}$ son semejantes ya que tienen los ángulos correspondientes iguales, $\angle PTQ = \angle SRQ = 50^{o}$, y por ser opuestos por el vértice $\angle PQT = \angle SQR$.

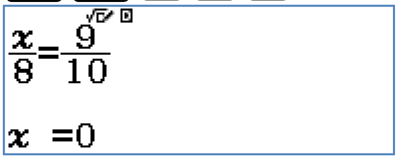
Aplicando el teorema de Tales: $\frac{\overline{PQ}}{\overline{QS}} = \frac{\overline{PT}}{\overline{SR}}$. $\frac{x}{8} = \frac{9}{10}$.

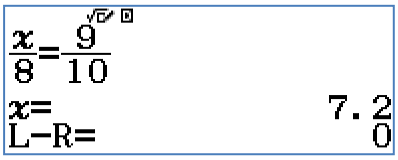
Podemos resolver la ecuación con la calculadora:

Introducimos la ecuación:



Resolvemos la ecuación:

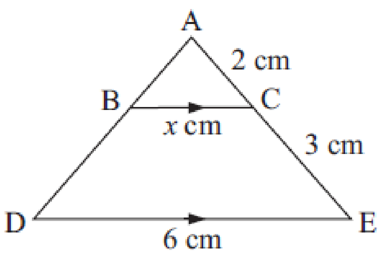




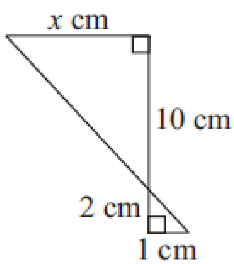
El valor de x es $x = 7.2cm$.

Problemas:

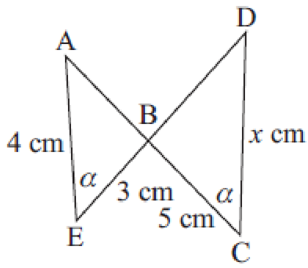
Determinar los valores de x en los siguientes ejercicios:



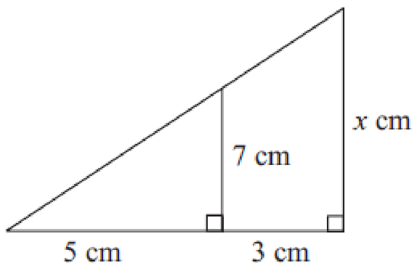
a)



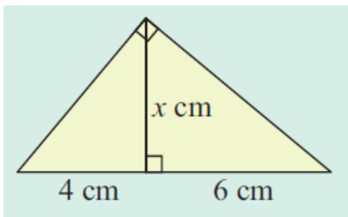
b)



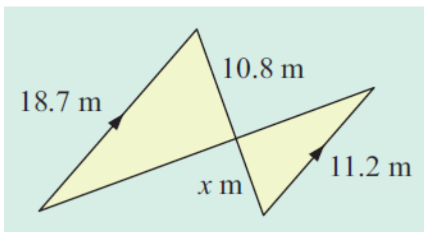
c)



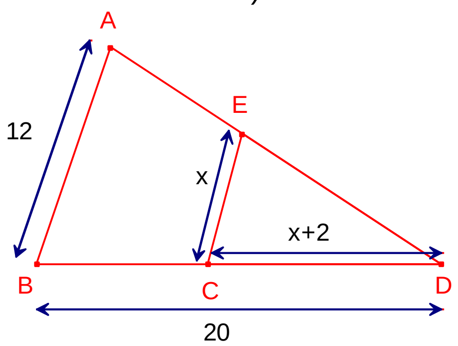
d)



e)



f)

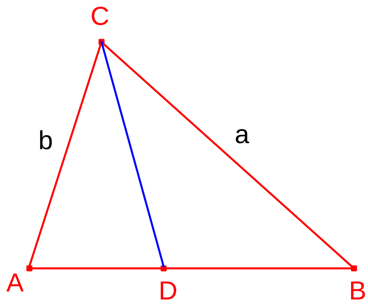


g)

Propiedad de la bisectriz de un triángulo.

Problema

En un triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ la diferencia entre los lados b y a es 24 m.
La bisectriz del ángulo C divide el lado c en dos partes, la contigua al lado b mide 26m, y la otra 10m.
Calcular los lados del triángulo y clasificarlo por los ángulos.
Temas de Grado Elemental, 1967. Problema 1517.



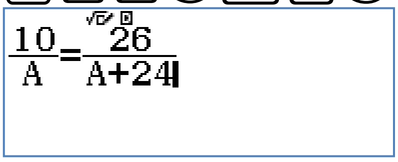
Solución:
Propiedad de la bisectriz:
La bisectriz interior de un triángulo divide el lado opuesto en dos partes que son proporcionales a los lados que con ella concurren.

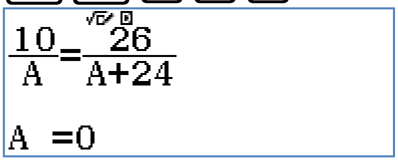
Sea $\overline{CD}$ la bisectriz del ángulo C, $\dfrac{\overline{BD}}{a} = \dfrac{\overline{AD}}{b}$.

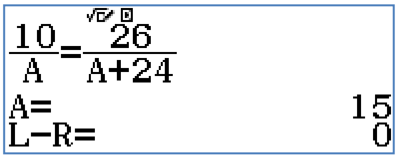
$c = \overline{BD} + \overline{AD} = 36$.
$b = a + 24$.

En el problema: $\dfrac{10}{a} = \dfrac{26}{b}$, $\dfrac{10}{a} = \dfrac{26}{a+24}$.

Resolvamos la ecuación anterior:
Introducimos la ecuación:

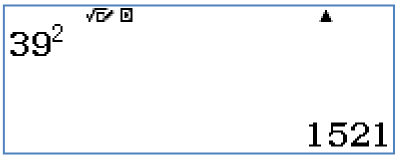


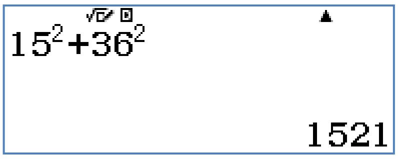




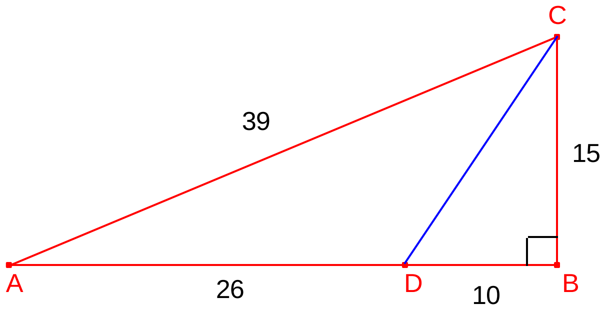
Entonces, $a = 15$.
$b = a + 24 = 15 + 24 = 39$.

Para clasificarlo, aplicaremos el teorema inverso del teorema de Pitágoras:
El lado mayor es $b = 39$.
Calculemos b^2 y $a^2 + c^2$:





Entonces, $b^2 = a^2 + c^2 = 1521$, el triángulo es rectángulo $B = 90º$.
El triángulo es pitagórico.



Problema 1

Sea un triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ de perímetro 19.25 cm y el lado $c = 7\,\text{cm}$.

La bisectriz $\overline{BD}$ del ángulo B divide el lado b en dos partes, $\overline{AD} = 2$.

Determinar la medida del segmento $\overline{CD}$.

Temas de Grado Elemental, 1967. Problema 1499.

Problema 2

Sea un triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ de perímetro 96 cm.

La bisectriz $\overline{AD}$ del ángulo A divide el lado a en dos partes, $\overline{BD} = 18\,\text{cm}$, $\overline{CD} = 14\,\text{cm}$.

Determinar los lados del triángulo.

Temas de Grado Elemental, 1967. Problema 1472.

Problema 3

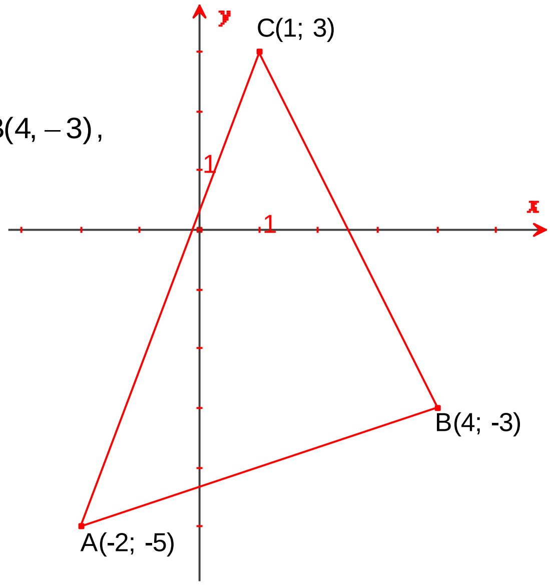
Los lados del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ son $a = 8\text{cm}$, $b = 7\text{cm}$ y $c = 5\text{cm}$.

La bisectriz del ángulo A costa el lado opuesto en el punto D.

Calcular las medidas de los segmentos $\overline{BD}$ y $\overline{CD}$.

Temas de Grado Elemental, 1967. Propuesta 32.

Área de un triángulo conocidas las coordenadas de los vértices.



Problema:

Sea el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ de vértices los puntos $A(-2, -5)$, $B(4, -3)$, $C(1, 3)$.

Determinar el área.

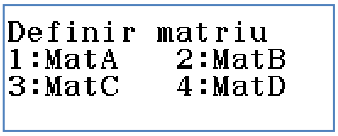
Solución 1:

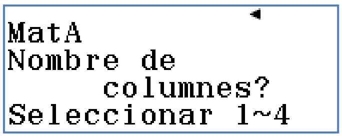
Sean los puntos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.

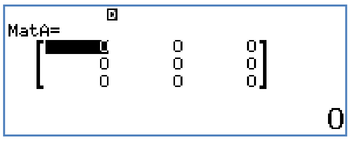
El área del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ es $S_{ABC} = \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}$.

Abrir el menú de matrices:

MENU 4 1 3 3

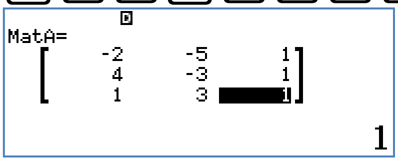






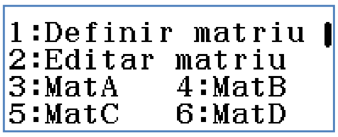
Introducir los elementos de la matriz:

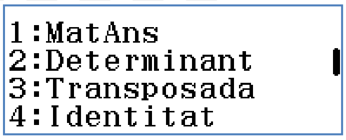
(−) 2 = (−) 5 = 1 = 4 = (−) 3 = 1 = 1 = 3 = 1 =

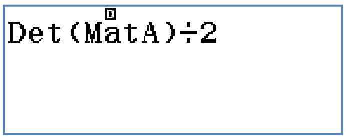


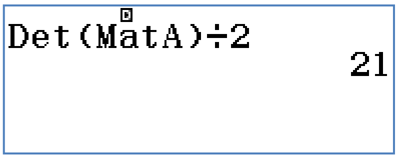
Calcular el determinante de la matriz:

AC OPTN ▼ 2 OPTN 3) ÷ 2 =









El ’área del triángulo es $S_{ABC} = \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 21$.

Solución 2:

El área del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ es $S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AC} \right\| \cdot \left\| \overrightarrow{AB} \right\| \cdot \sin A$.

Abrir el menú vectores.

```
Definir vector
1:VctA   2:VctB
3:VctC   4:VctD
```

En tres vectores introducir las coordenadas de los vértices.

[MENU] [5]

[1] [2] [(−)] [2] [=] [(−)] [5] [=] [OPTN] [2] [2] [2] [4] [=] [(−)] [3] [=] [OPTN] [2] [3]

[2] [1] [=] [3] [=]

```
VctA
Dimensió?

Seleccionar 2~3
```

```
VctA=
 [-2]
        -5
```

```
VctB=
 [4]
        -3
```

```
VctC=
 [1]
         3
```

Calcular la medida de los lados b, c:

[AC] [SHIFT] [(] [OPTN] [5] [−] [OPTN] [3] [)] [=] [STO] [°’’’]

[SHIFT] [(] [OPTN] [4] [−] [OPTN] [3] [)] [=] [STO] [x^{-1}]

```
Abs(VctC-VctA)
      8.544003745
Ans→B
      8.544003745
```

```
Abs(VctB-VctA)
       6.32455532
Ans→C
       6.32455532
```

Calcular el ángulo A:

[OPTN] [▼] [3] [OPTN] [5] [−] [OPTN] [3] [SHIFT] [)] [OPTN] [4] [−] [OPTN] [3] [)] [=] [STO] [(−)]

[AC]

```
Angle(VctC-VctA,V
ctB-VctA)
```

```
ctB-VctA)
      51.00900596
Ans→A
      51.00900596
```

Calcular el área:

[ALPHA] [°’’’] [×] [ALPHA] [x^{-1}] [×] [sen] [ALPHA] [(−)] [)] [÷] [2] [=]

```
B×C×sen(A)÷2
```

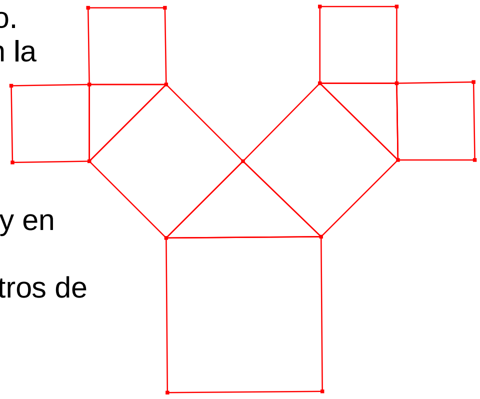
```
B×C×sen(A)÷2
               21
```

El área del triángulo es:

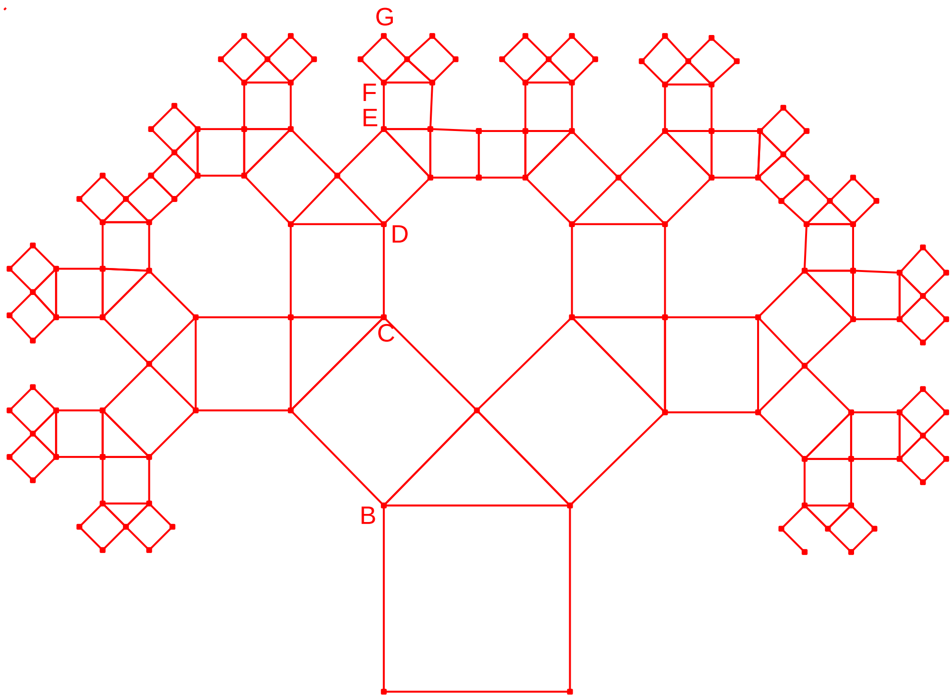
$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A = 21.$

Altura árbol pitagórico.

El crecimiento de un árbol de Pitágoras tiene la siguiente forma:
En el primer año, el árbol crece su tronco, que es un cuadrado.
En el segundo año, un triángulo rectángulo isósceles crece en la parte superior, tal que su hipotenusa es el lado superior del cuadrado, y luego las dos primeras ramas, también tienen forma cuadrada, crecen sobre los catetos del triángulo.
Este patrón se repite cada año, es decir, un triángulo rectángulo isósceles crece en la parte superior de cada rama y en sus catetos crecen dos nuevos cuadrados.
Dado que el tronco (es decir, el primer cuadrado) es de 1 metros de ancho, calcular la altura del árbol al final de 4 y 16 años.
El árbol de la imagen tiene tres años.
Generalizar el resultado



Solución:



Hemos dibujado el árbol de 6 años de vida.
La altura al final de cuatro años de vida es igual a la medida del segmento $\overline{AE}$.
Las longitudes que crece el árbol cada año son:
$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, ...

$1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \ldots\ldots.$

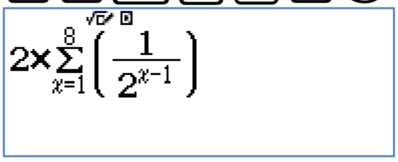
Sea $n = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$ Los años transcurridos.
La altura del árbol pitagórico por año es:

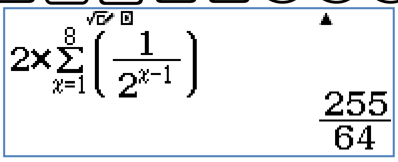
$$H_{2n-1}=2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+.........+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\ H_{2n}=2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+.........+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

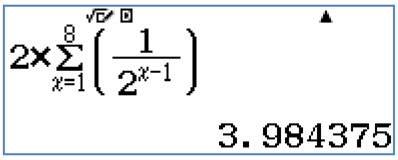
$$H_4=2\left(1+\frac{1}{2}\right)=3m\cdot$$

$$H_{16}=H_{2\cdot 8}=2\left(\sum_{x=1}^{8}\frac{1}{2^{x-1}}\right)\cdot$$

Utilizaremos la función de sumatorios de la calculadora Casio 991 classwiz, para calcular la altura al final de16 años:







La altura aproximada es $3.98m$.

Teorema de Pitágoras y sucesiones.

Problema 1:

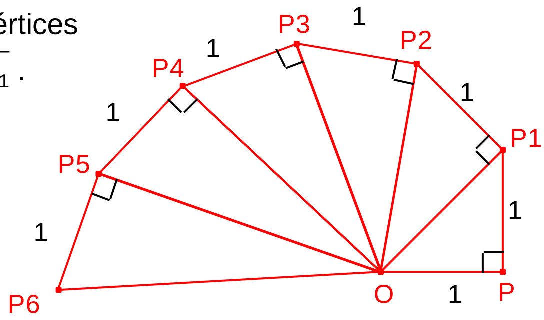
En la figura, todos los triángulos son rectángulo en los vértices $P, P_1, P_2, P_3, \ldots$. $1 = \overline{OP} = \overline{PP_1} = \overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3} = \ldots = \overline{P_iP_{i+1}}$.

a) Calcular las medidas de las 10 primeras hipotenusas $\overline{OP_1}, \overline{OP_2}, \overline{OP_3}, \overline{OP_4}, \ldots$ de los triángulos.

b) Calcular la medida de la hipotenusa $\overline{OP_n}$.

c) Calcular la suma de las 10 primeras hipotenusas.

d) Calcular la suma de las áreas de los 10 primeros triángulos.



Solución:

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{OPP_1}$: $\overline{OP_1} = \sqrt{\overline{OP}^2 + \overline{PP_1}^2}$ -

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo $\overset{\Delta}{OP_1P_2}$: $\overline{OP_2} = \sqrt{\overline{OP_1}^2 + \overline{P_1P_2}^2}$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{OP_2P_3}$:

$\overline{OP_3} = \sqrt{\overline{OP_2}^2 + \overline{P_2P_3}^2}$.

a)

Utilizaremos la función [Ans] de la calculadora.

[√■] [1] [x²] [+] [1] [x²] [=]

$\sqrt{1^2+1^2}$ → $\sqrt{2}$

$\overline{OP_1} = \sqrt{2}$.

[√■] [Ans] [x²] [+] [1] [x²] [=] [=] [=] [=] [=] [=] [=] [=] [=]

$\sqrt{Ans^2+1^2}$ → $\sqrt{3}$	$\sqrt{Ans^2+1^2}$ → 2	$\sqrt{Ans^2+1^2}$ → $\sqrt{5}$
$\sqrt{Ans^2+1^2}$ → $\sqrt{6}$	$\sqrt{Ans^2+1^2}$ → $\sqrt{7}$	$\sqrt{Ans^2+1^2}$ → $2\sqrt{2}$
$\sqrt{Ans^2+1^2}$ → 3	$\sqrt{Ans^2+1^2}$ → $\sqrt{10}$	$\sqrt{Ans^2+1^2}$ → $\sqrt{11}$

La medida de las primeras hipotenusas es:

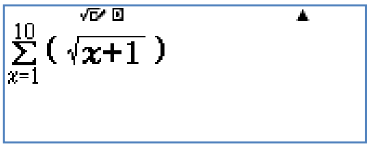
$\overline{OP_2}=\sqrt{3}, \overline{OP_3}=\sqrt{4}=2, \overline{OP_4}=\sqrt{5}, \overline{OP_5}=\sqrt{6}, \overline{OP_6}=\sqrt{7}, \overline{OP_7}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}, \overline{OP_8}=\sqrt{9}=3$

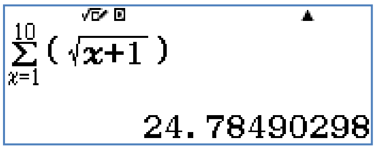
b)

$\overline{OP_n}=\sqrt{n+1}$. Podemos probar esta conjetura por inducción completa.

c)

Utilizaremos la función suma de series finitas





La suma es aproximadamente, 24.78490298.

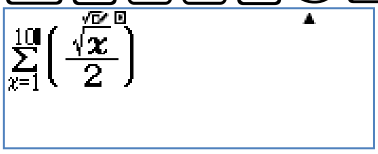
d)

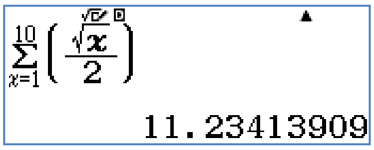
Las áreas de los primeros triángulos son:

$$S_1=\frac{1\cdot 1}{2},\ S_2=\frac{\sqrt{2}\cdot 1}{2},\ S_3=\frac{\sqrt{3}\cdot 1}{2},\ S_4=\frac{\sqrt{4}\cdot 1}{2},\ S_5=\frac{\sqrt{5}\cdot 1}{2},\ ....$$

$$S_n=\frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Para efectuar la suma de las áreas utilizaremos la función de sumas finitas de la calculadora.





La suma es aproximadamente 11.23413909.

Problema 2:

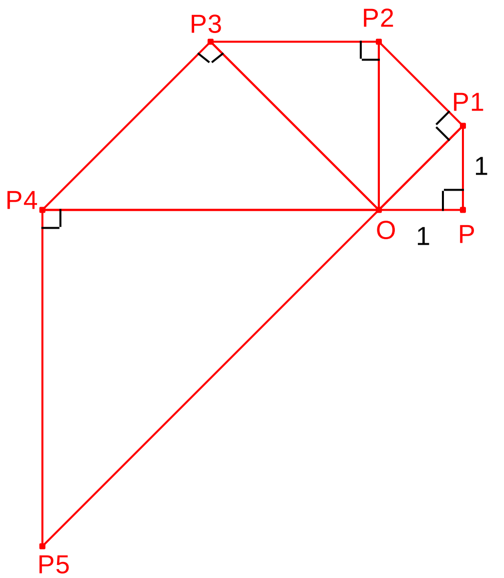
En la figura, todos los triángulos son rectángulo en los vértices $P, P_1, P_2, P_3, ...$ e isósceles. $1=\overline{OP}=\overline{PP_1}$.

a) Calcular las medidas de las 10 primeras hipotenusas $\overline{OP_1}, \overline{OP_2}, \overline{OP_3}, \overline{OP_4}, ,...$ de los triángulos.

b) Calcular la medida de la hipotenusa $\overline{OP_n}$.

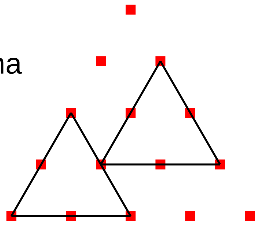
c) Calcular la suma de las 10 primeras hipotenusas.

d) Calcular la suma de las áreas de los 10 primeros triángulos.

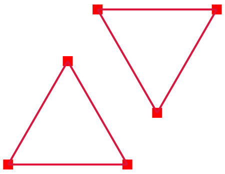


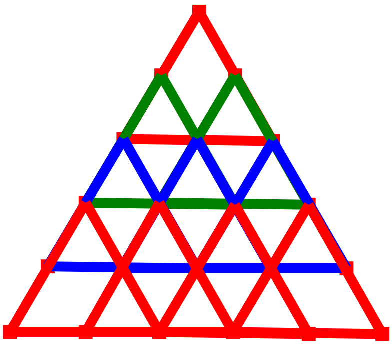
Trama isométrica. Número de triángulos

Sea una trama isométrica (triángulos equiláteros) de clavos a una Distancia 1 cm de uno a otro como indica la figura (5 clavos de lado).
Con elásticos se forman triángulos equiláteros de 2 cm de lado. (en la trama se han dibujado dos triángulos).
¿Cuántos triángulos equiláteros diferentes son posibles si la trama tiene 100 clavos por lado del triángulo equilátero.

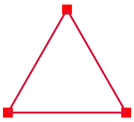


Solución:
Hay dos formas distintas de presentarse los triángulos:

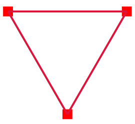




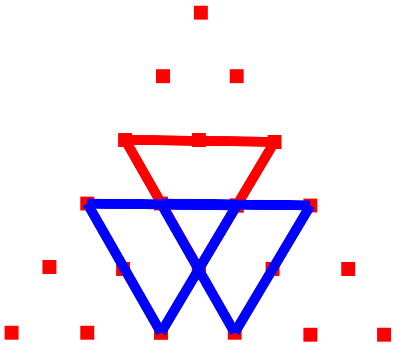
Supongamos que hay 6 clavos por lado.



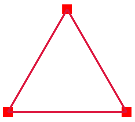
En la posición hay:
$1+2+3+4$ triángulos.



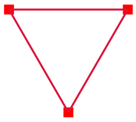
En la posición hay:
$1+2$ triángulos.
En total hay:
$T_6 = (1+2+3+4)+(1+2)$.



Supongamos que hay 100 clavos per lado.

En la posició  hay:

$1+2+3+4+.........+98$ triángulos.

En la posición  hay:

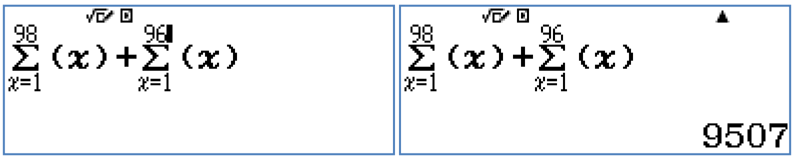
$1+2+3+.......+96$ triángulos.

En total hay:

$T_{100}=(1+2+3+......+98)+(1+2+3+......+96)$.

Con la calculadora Classwiz 991.

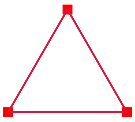
Utilizaremos la función de sumas finitas.



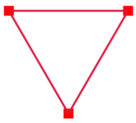
Se pueden formar 9507 triángulos diferentes.

Generalización:

Supongamos que hay n clavos per lado.

En la posición  hay:

$1+2+3+......+(n-2)$ triángulos.

En la posición  hay:

$1+2+3+......+(n-4)$ triángulos

En total hay:

$T_n=(1+2+3+......+(n-2))+(1+2+3+......+(n-4))$.

Sumando los términos de las dos progresiones aritméticas:

$$T_n=\left(\frac{1+n-2}{2}(n-2)\right)+\left(\frac{1+n-4}{2}(n-4)\right).$$

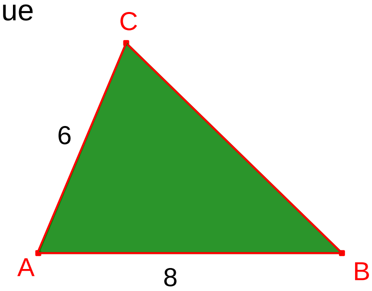
$$T_n=\left(\frac{n^2-3n+2}{2}\right)+\left(\frac{n^2-7n+12}{2}\right).$$

$T_n=n^2-5n+7$ donde n es el número de clavos por lado.

Función área de un triángulo. Área máxima

Determinar el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ de lados $\overline{AB} = 8\text{ cm}$, $\overline{AC} = 6\text{ cm}$ que tiene área máxima.

En este caso, calcular el valor del lado $\overline{BC}$.



Solución 1:

El área del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ en función de el ángulo A es:

$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A$. $S_{ABC} = \frac{1}{2} 6 \cdot 8 \sin A$.

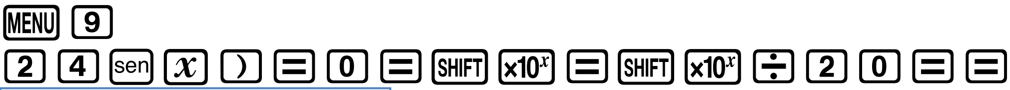
$S(x) = 24 \cdot \sin x$.

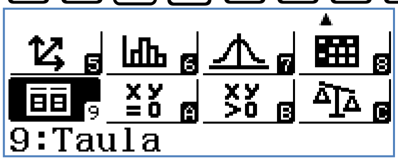
Construimos la tabla con la calculadora Casio 991.

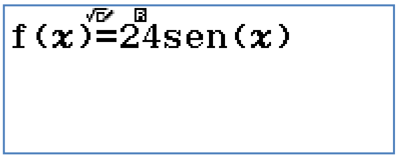
Notemos que los valores de x son números reales, entonces, las medidas serán radianes.

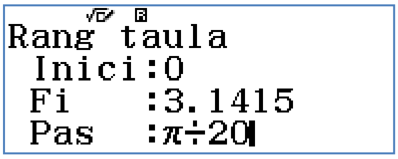
$S(x) = 24 \cdot \sin x$, $0 \le x \le \pi$.

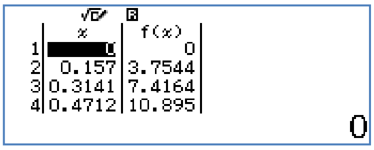
Inicio $x = 0$. El final $x = \pi$, el paso $\frac{\pi}{20}$.

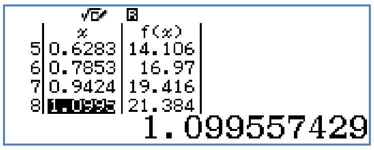


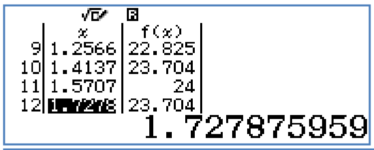


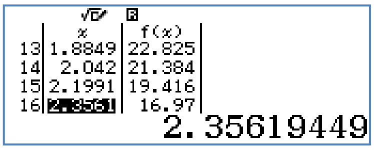


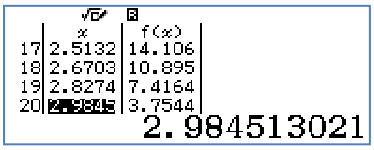


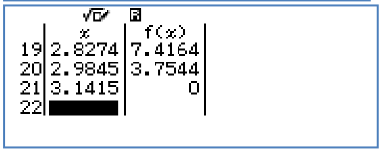










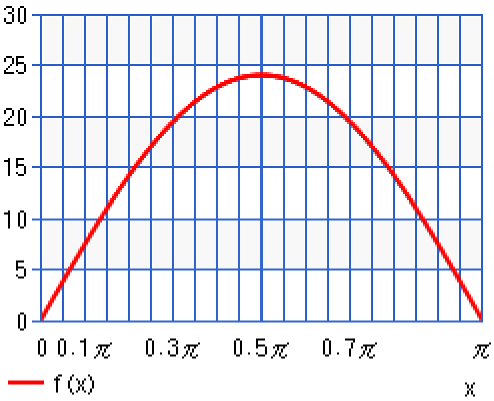


Observando la tabla notamos que el valor máximo se alcanza cuando $x = 1.5707$ y el área máxima es 24 cm^2.

Dibujamos la función utilizando el código QR de la calculadora 991:

SHIFT OPTN

1/1



Observando la gráfica el máximo se alcanza cuando:

$x = \frac{\pi}{2}$ es decir,, cuando el triángulo es rectángulo.

Aplicando el teorema de Pitágoras, la hipotenusa es $a = 10$ cm.

El área máxima es $24\ \text{cm}^2$.

Solución 2:

Utilizando la fórmula de Herón el área del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ es:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{4}.$$

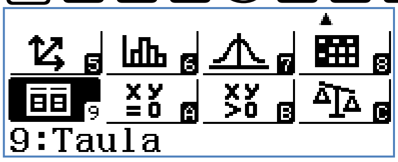
$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{(a+14)(-a+14)(a-2)(a+2)}}{2}. \quad a < 8+6 = 14,\ a+6 > 8.$$

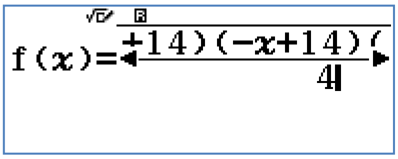
$$S(x) = \frac{\sqrt{(x+14)(-x+14)(x-2)(x+2)}}{2}, \quad 2 < a < 14.$$

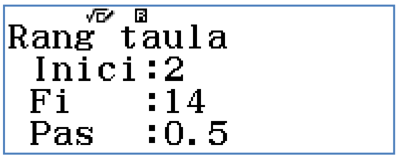
Construimos la tabla con la calculadora Casio 991.

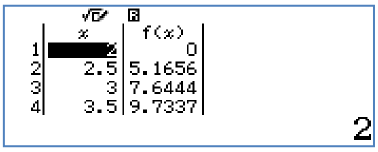
MENU 9

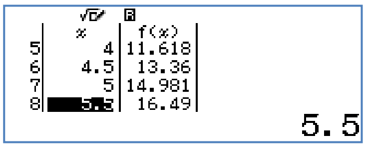
▭ √▭ (x + 1 4) (− x + 1 4) (x − 2) (
x + 2) ▼ 4 = 2 = 1 4 = 0 • 5 = =

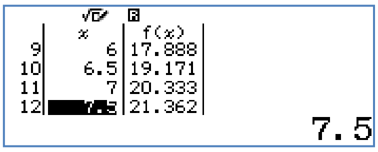


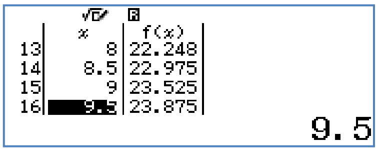


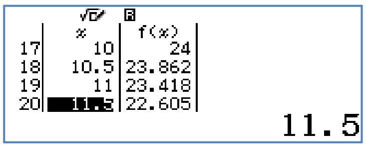


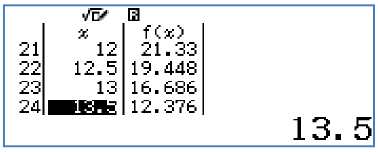










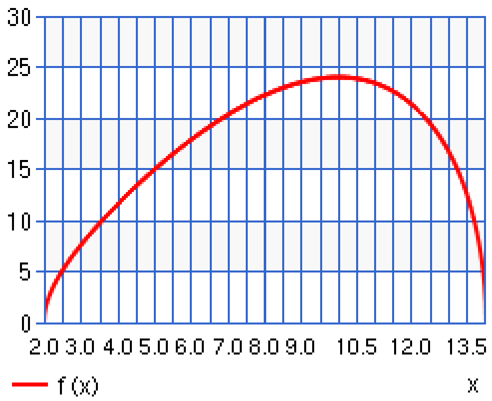


Observando la tabla notamos que el valor máximo se alcanza cuando $x = 10$ y el área máxima es $24\ \text{cm}^2$.

Dibujamos la función utilizando el código QR de la calculadora 991:

SHIFT OPTN

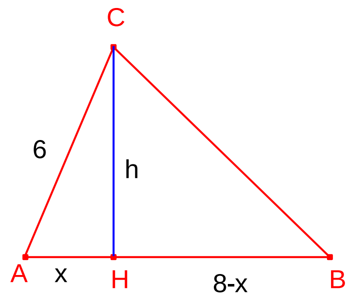
1/1



Observando la gráfica el máximo se alcanza cuando: $x = 10$, es decir, cuando el triángulo es rectángulo, ya que cumple el teorema inverso de Pitágoras.

El área máxima es $24\ \text{cm}^2$.

Solución 3:



Siga $\overline{CH} = h$ altura del triángulo, $\overline{AH} = x$, $\overline{BH} = 8 - x$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AHC}$

$6^2 - x^2 = h^2$, $h = \sqrt{36 - x^2}$.

El área del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ es:

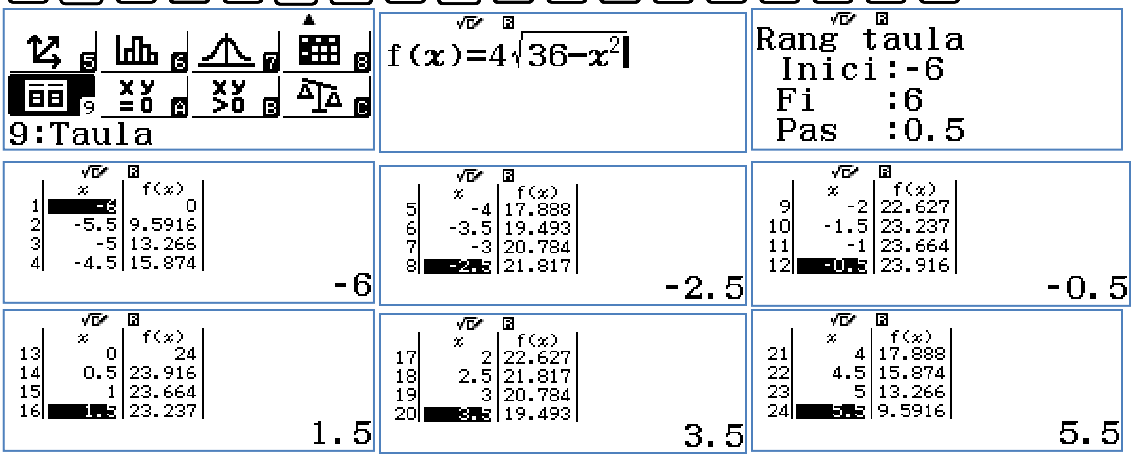
$S_{ABC} = \frac{1}{2} 8h = 4\sqrt{36 - x^2}$.

$S(x) = 4\sqrt{36 - x^2}$, $-6 < x < 6$.

Construimos la tabla con la calculadora Casio 991.

MENU 9

4 √ 3 6 − x x^2 = (−) 6 = 6 = 0 • 5 = =



Observando la tabla notamos que el valor máximo se alcanza cuando $x = 0$ y el área máxima es $24\ \text{cm}^2$.

Dibujamos la función utilizando el código QR de la calculadora 991:

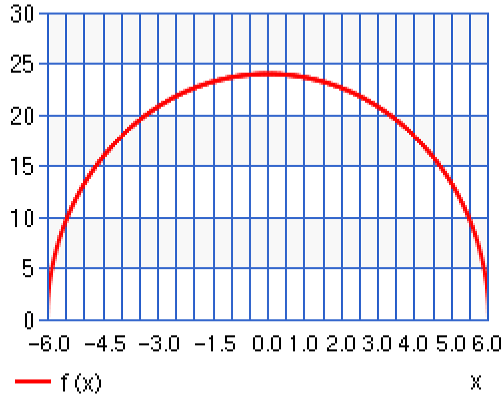
SHIFT OPTN

1/1

Observando la gráfica el máximo se alcanza cuando: $x = 0$, es decir, cuando el triángulo es rectángulo.

Aplicando el teorema de Pitágoras, la hipotenusa es $a = 10\ \text{cm}$.

El área máxima es $24\ \text{cm}^2$.



Bibliografía:

GÚSIEV, V. y otros, (1989). *Prácticas para resolver problemas matemáticos. Geometría.* Editorial Mir. Moscou.

SHARIGUIN, I.(1986). *Problemas de geometría. Planimetría*. Editorial Mir. Moscou.

AA.VV. (1998). *Matemáticas Recurrentes.* Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 13. Madrid.

HERNÁNDEZ GÓMEZ,J. DONAIRE MORENO,J.J. (2006). *Concurso intercentres de matemáticas*. Ed. Nivola. Madrid.

HERNÁNDEZ GÓMEZ,J. DONAIRE MORENO,J.J. (2007). *Desafíos de geometría 1.* Nivola. Madrid.

HERNÁNDEZ GÓMEZ,J. DONAIRE MORENO,J.J. (2008). *Desafíos de geometría 2*. Nivola. Madrid.

LIDSKI V. i altres. (1983) *Problemas de matemáticas elementales.* Ed Mir. Moscou.

COXETER, H.S.M. (1994). *Retorno a la geometría.* Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 1. Madrid.

Mathematical Association of America. (1996). *Concursos de matemáticas. Geometría*. Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 8. Madrid.

Mathematical Association of America. (1996). *Concursos de matemáticas. Algebra, Teoría de Números, Trigonometría*. Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 9 y 10. Madrid.

AA.VV. *Competencias Matemáticas en Estados unidos*. Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 11. Madrid. 1996.

GARDINER, T. (1996). *Mathematical Challenge.* Ed Cambridge University Press.

GARDINER, T. (1997). *More Mathematical Challenges.* Ed Cambridge University Press.

GARDINER, T. (2002). *Senior Mathematical Challenge.* Ed Cambridge University Press.

POSAMENTIER, A.S., SALKIND, C.T. (1988). *Challenging Problems in Geometry.*Dover Publications, inc. NY.

HALMOS, PAUL. (2000). *Problèmes pour mathématiciens petits et grands.* Ed. Cassini. París.

NELSEN, R.B. (2001) *Demostraciones sin palabras.* Ed. Proyecto Sur.