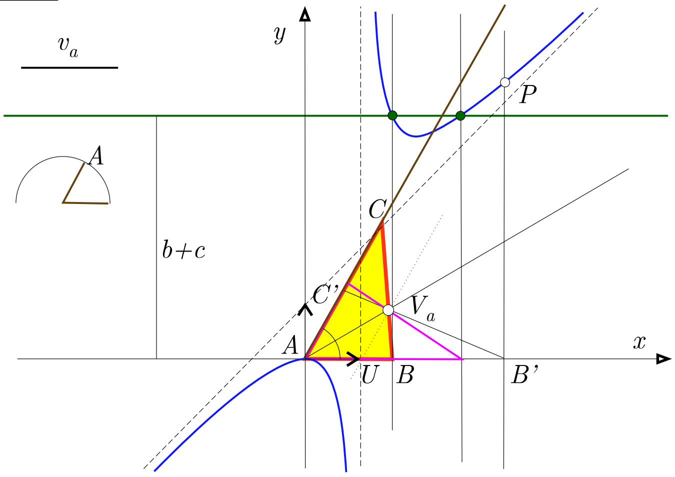
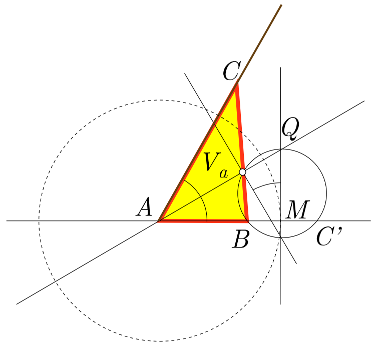
Construir un triángulo conociendo un ángulo, la bisectriz desde él y la suma de los lados adyacentes.

SOLUCIÓN:





Se construyen el ángulo dado A y en su bisectriz el punto V_a que dista del vértice A la cantidad dada v_a. Sobre uno de los lados se toma un punto B'. La recta $B'V_a$ corta al otro lado en C'. Sobre la perpendicular a AB' por B' se lleva la distancia $\overline{AB'} + \overline{AC'}$. El extremo P de este segmento describe una curva (hipérbola). La intersección de ésta con la recta paralela a AB' a una distancia $b + c$, nos da dos puntos, uno o ninguno. Cuando hay intersección se toma su proyección sobre AB' que es el vértice B buscado. La recta BV_a corta a AC' en el vértice C, y el triángulo $\widehat{ABC}$, queda determinado.

Nótese que el punto B' no se puede tomar entre el vértice A y el punto U de intersección del lado donde se toma B', con la paralela al otro lado por V_a. Cuando $B' = U$, P es un punto del infinito: la perpendicular por U a AU es una asíntota. Cuando B' se aleja de A indefinidamente, $\overline{AB'} + \overline{AC'} \mapsto \overline{AB'}$: la otra asíntota forma un ángulo de 45° con AU.

Para resolver el problema analíticamente y establecer que el lugar descrito por P, al variar B', es una hipérbola, tomemos un sistema de coordenadas rectangular con origen en A y vector unitario $\vec{AU}$, en el eje de abscisas.

En este sistema de coordenadas $V_a(1 + \cos A, \operatorname{sen} A)$, $B'(t, 0)$ y C' es la intersección de las rectas:

$$B'V_a \equiv \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1+\cos A & \operatorname{sen} A & 1 \\ t & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad y = (\operatorname{tag} A)x.$$

Luego,

$$C'\left(\frac{t\cos A}{t-1}, \frac{t \operatorname{sen} A}{t-1}\right),$$

que, usando MATHEMATICA, se puede obtener mediante:

```
Solve[{Det[{{x,y,1},{1+u,v,1},{t,0,1}}]==0,u*y==v*x,u^2+v^2==1},{x,y}]
```

Así,

$$\overline{B'P} = \overline{AB'} + \overline{AC'} = t + \frac{t}{t-1},$$

y el lugar geométrico de P es la hipérbola de asíntotas $x = 1$ e $y = x + 2$:

$$y = \frac{x^2}{x-1}.$$

La distancia $b + c$ en las nuevas unidades tiene el valor

$$d = \frac{(b+c)\sqrt{2 + 2\cos A}}{v_a}.$$

Los puntos de intersección de la hipérbola con la recta $y = d$,

$$\left(\frac{d \pm \sqrt{d(d-4)}}{2}, d\right),$$

nos permite obtener el vértice B, proyectando ortogonalmente sobre AB'. Existe solución si $d \geq 4$, ordenada del punto (distinto de A) de tangencia horizontal.

Solución de Quim Castellsaguer (figura de la derecha):

`http://www.xtec.es/~qcastell/ttw/ttwesp/construccions/c38.html`

1) Se sitúan el ángulo A y la bisectriz AV_a. Sobre un lado del ángulo se toma M tal que $AM = (b + c)/2$.
2) La perpendicular a AM por M corta la bisectriz AV_a en Q.
3) El arco capaz de V_aQ con ángulo $A/2$ corta el lado de M en B y C', donde B es el más cercano a A.
4) Sea C el simétrico de C' respecto AV_a. Entonces $\widehat{ABC}$ es el triángulo buscado.

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/trresolu.pdf
http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejct2121.pdf