Pr. Cabri 783

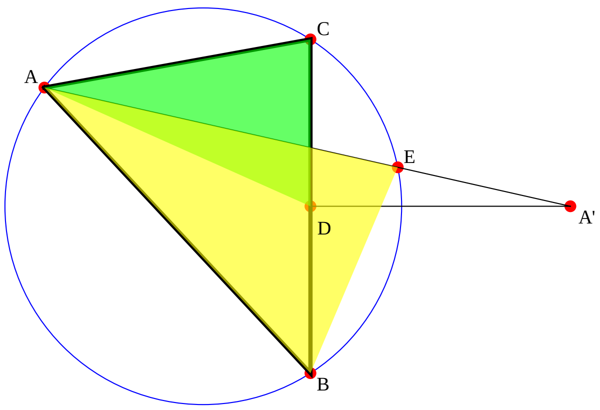
Enunciado

Si D es el punto medio del lado BC de un triángulo ABC y las tangentes a B, C de la circunferencia circunscrita se cortan en A', los ángulos BAA' y CAD son iguales.
Wolstenholme, J. (1867):A Book of Mathematical Problems on Subjects Included in the Cambridge Course (p. 5)

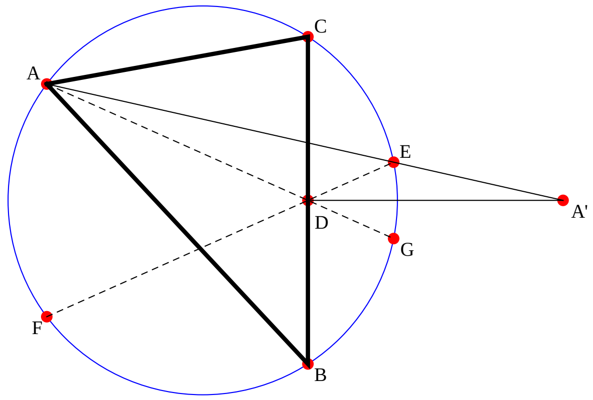
Solución de César Beade Franco y Manuel Gándara Pastrana

Solución 1

Consideremos la circunferencia circunscrita de centro (0,0) y radio 1.
Podemos tomar como vértices del triángulo A(Cosα, Senα), B(Cos(-θ), Sen(-θ)) y C(Cosθ, Senθ) .
El punto D será (Cosθ, 0) y A'($\frac{1}{\text{Cos}\theta}$, 0). intersecamos la recta AA' con la circunferencia circunscrita, obteniendo E($-\frac{\text{Cos}\alpha-2\,\text{Sec}\theta+\text{Cos}\alpha\,\text{Sec}\theta^2}{1-2\,\text{Cos}\alpha\,\text{Sec}\theta+\text{Sec}\theta^2}$, $\frac{\text{Sen}\alpha\,\text{Tg}\theta^2}{1-2\,\text{Cos}\alpha\,\text{Sec}\theta+\text{Sec}\theta^2}$).
Basta demostrar que los triángulos AEB y ACD son proporcionales lo que se consigue probando que lo son los lados que limitan los ángulos iguales C y E.
Calculando los módulos de los vectores implicados vemos que $\frac{AC}{CD}=\frac{AE}{EB}\Leftrightarrow\frac{|C-A|}{|D-C|}=\frac{|E-A|}{|B-E|}=$ $2\,\text{Cosec}\theta\,\text{Sin}\left[\frac{\alpha-\theta}{2}\right]$



■ **Solución 2**



Añadamos al dibujo anterior los puntos F y G, simétricos respecto a la recta A'D de los puntos A y E.

De la solución anterior y por simetría deducimos las coordenadas de $G(-\frac{\text{Cos}\alpha-2\ \text{Sec}\theta+\text{Cos}\alpha\ \text{Sec}\theta^2}{1-2\ \text{Cos}\alpha\ \text{Sec}\theta+\text{Sec}\theta^2},\ -\frac{\text{Sen}\alpha\ \text{Tg}\theta^2}{1-2\ \text{Cos}\alpha\ \text{Sec}\theta+\text{Sec}\theta^2})$.

El cálculo $\text{Det}(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DG}) = 0$ nos demuestra que A, D, G alineados (y por simetría también F, D, E) lo que implica que los arcos CE y GB son iguales. Por tanto lo son también las parejas de ángulos BAA', CAD y CAA', BAD.