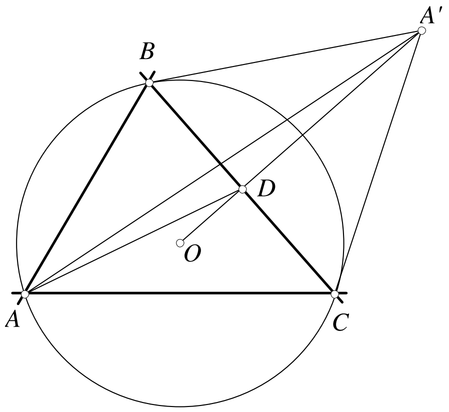
Problema 783 de *triánguloscabri*. *28. Si D es el punto medio del lado BC de un triángulo ABC y las tangentes a B, C de la circunferencia circunscrita se cortan en A', los ángulos BAA' y CAD son iguales.*

Wolstenholme, J. (1867):A Book of Mathematical Problems on Subjects Included in the Cambridge Course (p. 5).

N. del D. Según varios hiostoriadores, la primera vez que se utilizó isogonal fue por J. Casey en "Theory of isogonal and isotomic points and of antiparallel and symedian lines", en "A sequel to the first six books of the elements of Euclid", 1888.

Solución por Francisco Javier García Capitán. Este problema establece que las rectas AD (mediana) y AD' son isogonales, y por tanto que AD' es una simediana del triángulo ABC. Damos una demostración usando números complejos. Como es habitual, asumimos que que la circunferencia circunscrita a ABC es la circunferencia unidad y usamos letras minúsculas para designar los números complejos que corresponden a puntos con las letras mayúsculas correspondientes.



Tenemos $d = \frac{b+c}{2}$. El punto A' es inverso de D respecto de la circunferencia circunscrita. La inversión tiene ecuación $z' = \frac{1}{\bar{z}}$. Entonces tenemos que

$$a' = \frac{1}{\bar{d}} = \frac{2}{\bar{b}+\bar{c}} = \frac{2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \frac{2bc}{b+c}.$$

Para comprobar que los ángulos BAA' y CAD son iguales, comprobamos que el número complejo

$$\lambda = \frac{d-a}{c-a} : \frac{b-a}{a'-a}$$

es real. En efecto,

$$\lambda = \frac{\frac{b+c}{2}-a}{c-a} : \frac{b-a}{\frac{2bc}{b+c}-a} = \frac{(2a-b-c)(ab+ac-2bc)}{2(a-b)(a-c)(b+c)},$$

que es real, ya que es invariante a la sustituición $a \to \frac{1}{a}, b \to \frac{1}{b}, c \to \frac{1}{c}$.