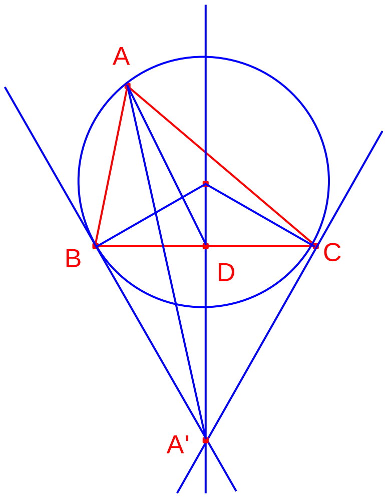
Problema 783

Si D és el punt mig del costat $\overline{BC}$ del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i les tangents a B, D de la circumferència circumscrtia es tallen en A', aleshores, els angles $\angle BAA'$ i $\angle CAD$ són iguals.



Solució de Ricard Peiró:

$\overline{A'B} = \overline{A'C}$, $\angle ACA' = A + C$, $\angle ABA' = A + B$.

Sean $\angle CAD = \alpha$, $\angle BAA' = \beta$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABA'}$:

$$\frac{\overline{A'B}}{\sin\beta} = \frac{\overline{AA'}}{\sin C} \qquad (1)$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ACA'}$:

$$\frac{\overline{A'B}}{\sin(A-\beta)} = \frac{\overline{AA'}}{\sin B} \qquad (2)$$

Dividint les expressions (1) (2):

$$\frac{\sin(A-\beta)}{\sin\beta} = \frac{\sin B}{\sin C} \qquad (3)$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ADC}$:

$$\frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{\overline{AD}}{\sin C} \qquad (4)$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$:

$$\frac{a}{2\sin(A-\alpha)} = \frac{\overline{AD}}{\sin B} \qquad (5)$$

Dividint les expressions (4) (5):

$$\frac{\sin(A-\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\sin B}{\sin C} \qquad (6)$$

Igualant les expressions (3) (6):

$$\frac{\sin(A-\beta)}{\sin\beta} = \frac{\sin(A-\alpha)}{\sin\alpha} \qquad (7)$$

$$\sin(A-\beta)\cdot\sin\alpha = \sin(A-\alpha)\cdot\sin\beta \qquad (8)$$

Transformant productes en sumes:

$$\cos(A-\beta-\alpha) - \cos(A-\beta+\alpha) = \cos(A-\beta-\alpha) - \cos(A-\alpha+\beta) \qquad (9)$$

Simplificant:

$$\cos(A-\beta+\alpha) = \cos(A-\alpha+\beta) \qquad (10)$$

$$A-\beta+\alpha = A-\alpha+\beta \qquad (11)$$

Simplificant:

$\alpha = \beta$