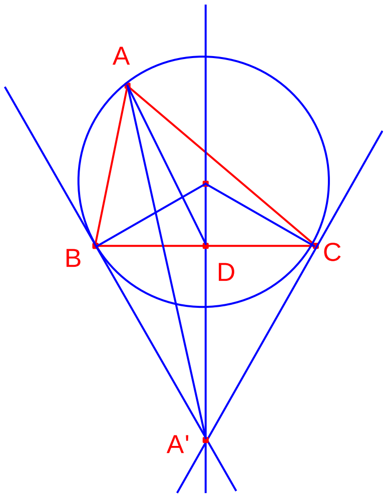
Problema 783.-

28. Si D es el punto medio del lado BC de un triángulo ABC y las tangentes a B, C de la circunferencia circunscrita se cortan en A', los ángulos BAA' y CAD son iguales.




Solución de Ricard Peiró:

$\overline{A'B} = \overline{A'C}$, $\angle ACA' = A + C$, $\angle ABA' = A + B$.

Siguen $\angle CAD = \alpha$, $\angle BAA' = \beta$.

Aplicando el teorema de los senos al triángulo $\overset{\Delta}{ABA'}$:

$$\frac{\overline{A'B}}{\sin\beta} = \frac{\overline{AA'}}{\sin C} \qquad (1)$$

Aplicando el teorema de los senos al triángulo $\overset{\Delta}{ACA'}$:

$$\frac{\overline{A'B}}{\sin(A-\beta)} = \frac{\overline{AA'}}{\sin B} \qquad (2)$$

Dividiendo las expresiones (1) (2):

$$\frac{\sin(A-\beta)}{\sin\beta} = \frac{\sin B}{\sin C} \qquad (3)$$

Aplicando el teorema de los senos al triángulo $\overset{\Delta}{ADC}$:

$$\frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{\overline{AD}}{\sin C} \qquad (4)$$

Aplicando el teorema de los senos al triángulo $\overset{\Delta}{ABD}$:

$$\frac{a}{2\sin(A-\alpha)} = \frac{\overline{AD}}{\sin B} \qquad (5)$$

Dividiendo las expresiones (4) (5):

$$\frac{\sin(A-\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\sin B}{\sin C} \qquad (6)$$

Igualando las expresiones (3) (6):

$$\frac{\sin(A-\beta)}{\sin\beta} = \frac{\sin(A-\alpha)}{\sin\alpha} \qquad (7)$$

$$\sin(A-\beta)\cdot\sin\alpha = \sin(A-\alpha)\cdot\sin\beta \qquad (8)$$

Transformando productos en sumas:

$$\cos(A-\beta-\alpha) - \cos(A-\beta+\alpha) = \cos(A-\beta-\alpha) - \cos(A-\alpha+\beta) \qquad (9)$$

Simplificando:

$$\cos(A-\beta+\alpha) = \cos(A-\alpha+\beta) \qquad (10)$$

$$A-\beta+\alpha = A-\alpha+\beta \qquad (11)$$

Simplificando:

$$\alpha = \beta$$