Problema 784.-

Sea Ω la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. La circunferencia ω es tangente a los lados AC y BC, y es tangente internamente a la circunferencia Ω en el punto P.

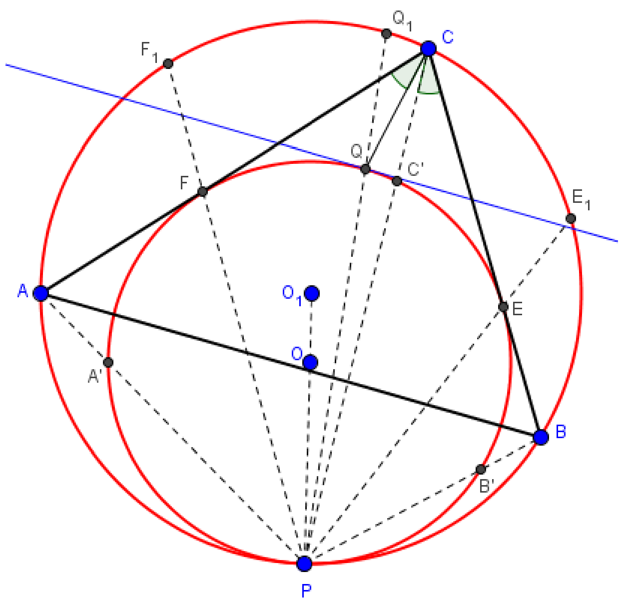
Una recta paralela a AB que corta internamente al triángulo ABC, es tangente a ω en el punto Q.

Demostrar que <ACP=<QCB.

https://www.egmo.org/egmos/egmo5/ 11 de Abril de 2013

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor de Matemáticas del IES Blas Infante de Córdoba.

Construimos la circunferencia Ω circunscrita al triángulo ABC y la circunferencia ω, que es tangente a los lados AC y BC y tangente internamente a la circunferencia Ω en el punto P. De este modo, podemos considerar que ambas circunferencias son homotéticas de centro, el propio punto P.



Así, podemos detallar los siguientes hechos de interés:

Hecho 1.- La bisectriz del ángulo $\measuredangle CPB$ ha de pasar necesariamente por E, punto de contacto de la circunferencia ω y el lado BC. Eso es así porque al ser este lado perpendicular a su radio vector OE, entonces el radio vector O_1E_1, también será perpendicular a la cuerda BC de la circunferencia Ω. Por tanto, O_1E_1 es la mediatriz de BC y así PE_1es la bisectriz del ángulo $\measuredangle CPB$.

De igual modo, PF_1 es la bisectriz del ángulo $\measuredangle CPA$.

Hecho 2.- Sea la recta paralela a AB y que es tangente a ω en el punto Q. Por tanto, por la homotecia dada, el punto Q_1 será el punto medio del arco AB en la circunferencia Ω.

Hecho 3.- Vamos a deducir la igualdad de ángulos $\measuredangle F_1PQ_1 = \measuredangle CPE_1$.

Para ello, a partir de la igualdad $\measuredangle Q_1PA = \measuredangle Q_1PB$, sabemos que $\measuredangle Q_1PA = \measuredangle APF_1 + \measuredangle F_1PQ_1$,

$entonces\ \measuredangle Q_1PA = \measuredangle F_1PC + \measuredangle F_1PQ_1 = \measuredangle F_1PQ_1 + \measuredangle Q_1PC + \measuredangle F_1PQ_1 = 2\measuredangle F_1PQ_1 + \measuredangle Q_1PC.$

Por otro lado, $\measuredangle Q_1PB = \measuredangle Q_1PC + \measuredangle CPE_1 + \measuredangle E_1PB,\ entonces$

$\measuredangle Q_1PB = \measuredangle Q_1PC + \measuredangle CPE_1 + \measuredangle CPE_1 = \measuredangle Q_1PC + 2\measuredangle CPE_1$

En definitiva, $\measuredangle Q_1PA = \measuredangle Q_1PB \rightarrow 2\measuredangle F_1PQ_1 + \measuredangle Q_1PC = \measuredangle Q_1PC + 2\measuredangle CPE_1 \rightarrow \boldsymbol{\measuredangle F_1PQ_1 = \measuredangle CPE_1}.$

Hecho 4.- De la igualdad anterior $\boldsymbol{\measuredangle F_1PQ_1} = \boldsymbol{\measuredangle CPE_1} \rightarrow \boldsymbol{\measuredangle FPQ} = \boldsymbol{\measuredangle C'PE} \rightarrow \begin{cases} \overline{\boldsymbol{FQ}} = \overline{\boldsymbol{EC'}} \\ \boldsymbol{\measuredangle CFQ} = \boldsymbol{\measuredangle CEC'} \end{cases}$

Como $\overline{\boldsymbol{CF}} = \overline{\boldsymbol{CE}}$, por ser ambos segmentos tangentes a la misma circunferencia ω. En definitiva, los triángulos $\Delta CFQ\ y\ \Delta CEC'$ son semejantes y congruentes. Así entonces, $\boldsymbol{\measuredangle FCQ} = \boldsymbol{\measuredangle ECC'}$

$$\boldsymbol{\measuredangle ACP} = \boldsymbol{\measuredangle FCQ} + \boldsymbol{\measuredangle QCP} = \boldsymbol{\measuredangle ECC'} + \boldsymbol{\measuredangle QCP} = \boldsymbol{\measuredangle QCB} \rightarrow$$

$$\boldsymbol{\measuredangle ACP = \measuredangle QCB}, \quad \boldsymbol{cqd.} \qquad \blacksquare$$