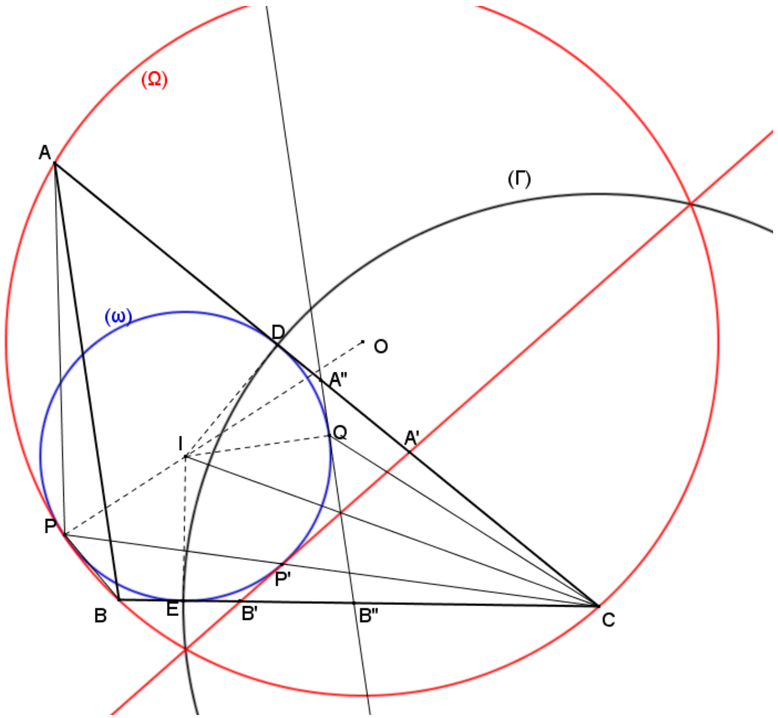
**Problema 784.**

Problema 5.- Sea Ω la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. La circunferencia ω es tangente a los lados AC y BC, y es tangente internamente a la circunferencia Ω en el punto P. Una recta paralela a AB que corta internamente al triángulo ABC, es tangente a ω en el punto Q.
Demostrar que <ACP=<QCB.
https://www.egmo.org/egmos/egmo5/ 11 de abril de 2013

**Solution proposée par Philippe Fondanaiche**




Soit I le centre du cercle (ω). La droite CI est bissectrice de l'angle $\angle$ACB.
L'égalité des angles $\angle$ACP et $\angle$BCQ est équivalente à l'égalité des angles $\angle$PCI et $\angle$QCI.
Soient D et E les points de contact du cercle (ω) avec les côtés CA et CB du triangle ABC.
On considère **l'inversion de centre C et de rayon r = CD = CE** [voir cercle (Γ)]
Le cercle (ω) reste inchangé par cette inversion et le point P devient le point P' à l'intersection de la droite CP avec ce cercle.
Par cette même inversion,le cercle (Ω) qui passe par les points A,B,C et P et est tangent à (ω) au point P, devient la tangente à (ω) au point P'. Celle-ci coupe respectivement CA et CB aux points A' et B' tels que :CA.CA' = CB.CB' = $r^2$.
Soient A" et B" les points respectivement situés sur CA et CB et symétriques de B' et de A' par rapport à la droite CI. La droite A"B" symétrique de la droite A'B' est elle-même tangente au cercle (ω) en un point Q' symétrique de P' par rapport à la droite CI.
Démontrons que ce point Q' est confondu avec le point Q tel que défini dans l'énoncé.Pour ce faire, il suffit de prouver que A"B"" est parallèle à AB.
Or CA" = CB' et CB" = CA'.
Donc $r^2$ = CA.CA' = CB.CB' = CA.CB" = CB.CA" .
Il en résulte CA/CA" = CB/CB" et les droites AB et A"B" sont bien parallèles entre elles.
Les droites CPP' et CQ étant symétriques par rapport à CI, on a donc $\angle$PCI = $\angle$QCI.