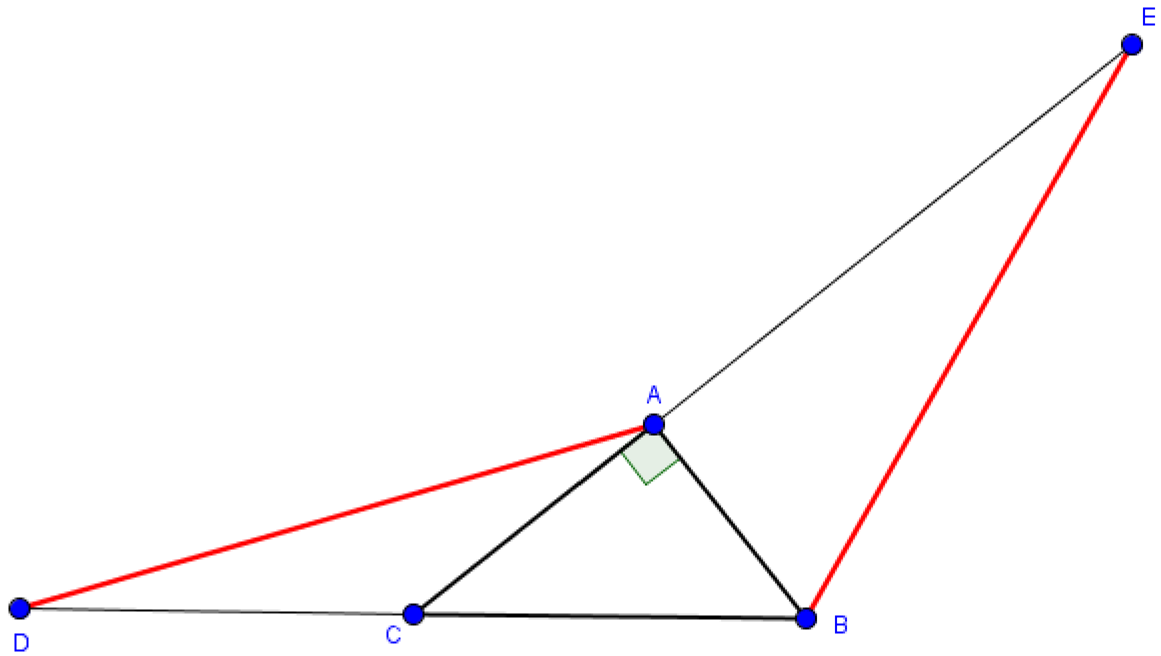
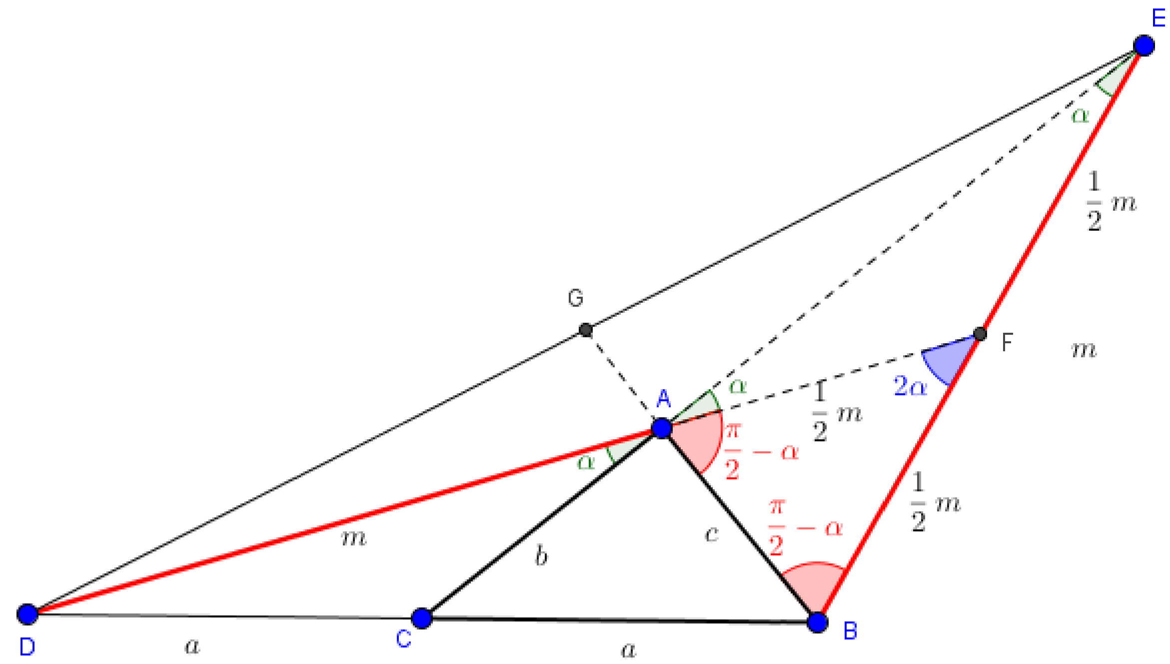
<u>Problema 785.-</u>
El lado BC del triángulo ABC se extiende desde C hacia D tal que CD=BC.
El lado CA se extiende desde A hacia E tal que AE=2CA.
Demostrar que si y solo si AD=BE, el triángulo ABC es rectángulo.

https://www.egmo.org/egmos/egmo5/ 10 de Abril de 2013

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor de Matemáticas del IES Blas Infante de Córdoba.
Dado el triángulo ΔABC, realizamos la construcción del enunciado.



$\Longrightarrow (AD = BE)$
Entonces podemos considerar que el punto A es el baricentro del triángulo ΔBDE.
De este modo, resultaría la siguiente configuración de segmentos y ángulos que conduciría a que el triángulo ***ΔABC es rectángulo en A.***



$\Longleftarrow (\measuredangle BAC = \frac{\pi}{2} \leftrightarrow \; a^2 = b^2 + c^2)$

Vamos a probar que, en efecto, $AD = BE$.

Sea ahora el triángulo rectángulo $\Delta DAA'$, donde $AA' = h_a$. Ahora tenemos que $AA' = h_a = \frac{b\,c}{a}$.

Además sabemos que $CA' = \frac{b^2}{a}$. Por tanto, llegamos a obtener que:

$$AD^2 = A'D^2 + {h_a}^2 = (a + \frac{b^2}{a})^2 + \left(\frac{b\,c}{a}\right)^2 = a^2 + 2b^2 + \frac{b^4}{a^2} + \frac{b^2(a^2-b^2)}{a^2} = a^2 + 3b^2.$$

Por otra parte, en el triángulo rectángulo $\Delta BAE,\; BE^2 = AB^2 + AE^2$.

$BE^2 = c^2 + (2b)^2 = c^2 + 4b^2 = a^2 - b^2 + 4b^2 = a^2 + 3b^2$.

En definitiva, $\boldsymbol{AD = BE}$.