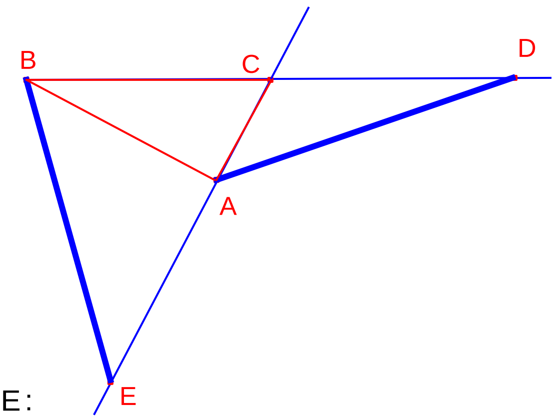
Problema 785

El costat $\overline{BC}$ del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ s'allarga des de C fins D tal que $\overline{CD}=\overline{BC}$.
El costat $\overline{CA}$ s'allarga des de A fins E tal que $\overline{AE}=2\overline{CA}$. Demostreu que:

$\overline{AD}=\overline{BC}$ si només si, el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle.

Solució de Ricard Peiró:




($\Leftarrow$)

Suposem que el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle, $A=90º$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BAD}$:

$$\overline{AD}^2=c^2+4a^2-2c\cdot 2a\cdot\cos B=c^2+4a^2-2c\cdot 2a\cdot\frac{c}{a}.$$

Simplificant:

$$\overline{AD}^2=4a^2-3c^2.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BAE}$:

$$\overline{BE}^2=4b^2+c^2.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$a^2=b^2+c^2$, aleshores,

$$\overline{BE}^2=4a^2-3c^2.$$

Aleshores, $\overline{AD}=\overline{BC}$.

($\Rightarrow$)

Suposem que $\overline{AD}=\overline{BC}$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ACD}$:

$$\overline{AD}^2=a^2+b^2+2ab\cdot\cos C \qquad (1)$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BEC}$ :

$$\overline{BE}^2=a^2+9b^2+2a3b\cdot\cos C \qquad (2)$$

Igualant les expressions (1) (2):

$$2ab\cdot\cos C=2b^2 \qquad (3)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$2ab\cdot\cos C=a^2+b^2-c^2 \qquad (4)$$

Igualant les expressions (3) (4)

$$2b^2=a^2+b^2-c^2.$$

Aleshores, $a^2=b^2+c^2$.

Aplicant el teorema invers del teorema de Pitàgores:

$A=90º$, aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle.