Problema 785

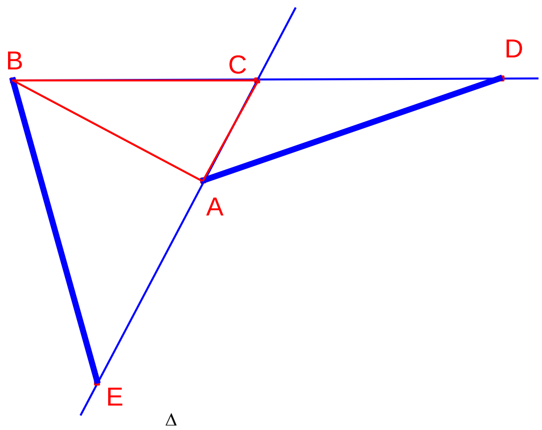
Problema 1.- El lado $\overline{BC}$ del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ se extiende desde C hacia D tal que $\overline{CD} = \overline{BC}$.

El lado $\overline{CA}$ se extiende desde A hacia E tal que $\overline{AE} = 2\overline{CA}$.

Demostrar que si y solo si $\overline{AD} = \overline{BC}$, el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ es rectángulo

Solución de Ricard Peiró:

($\Leftarrow$)



Supongamos que el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ es rectángulo,

$A = 90^{\circ}$

Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\overset{\Delta}{BAD}$:

$\overline{AD}^2 = c^2 + 4a^2 - 2c \cdot 2a \cdot \cos B = c^2 + 4a^2 - 2c \cdot 2a \cdot \dfrac{c}{a}$.

Simplificando:

$\overline{AD}^2 = 4a^2 - 3c^2$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{BAE}$:

$\overline{BE}^2 = 4b^2 + c^2$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$:

$a^2 = b^2 + c^2$, entonces,

$\overline{BE}^2 = 4a^2 - 3c^2$.

Entonces, $\overline{AD} = \overline{BC}$.

($\Rightarrow$)

Supongamos que $\overline{AD} = \overline{BC}$.

Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\overset{\Delta}{ACD}$:

$\overline{AD}^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos C$ (1)

Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\overset{\Delta}{BEC}$:

$\overline{BE}^2 = a^2 + 9b^2 + 2a3b \cdot \cos C$ (2)

Igualando las expresiones (1) (2):

$2ab \cdot \cos C = 2b^2$ (3)

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$:

$2ab \cdot \cos C = a^2 + b^2 - c^2$ (4)

Igualando las expresiones (3) (4)

$2b^2 = a^2 + b^2 - c^2$.

Entonces, $a^2 = b^2 + c^2$.

Aplicando el teorema inverso del teorema de Pitágoras:

$A = 90^{\circ}$, entonces, el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ es rectángulo.