Problema 786 de *triánguloscabri*. *Construir un triángulo ABC, tal que $m_a = a$, $w_b = b$.*

Barroso, R. (2016) Comunicación personal.

Solución por Francisco Javier García Capitán. En primer lugar, tratamos de determinar si tal construcción existe. En principio, buscamos una construcción con regla y compás. Las condiciones $m_a = a$ y $w_b = b$ equivalen, respectivamente a las ecuaciones

$$\begin{aligned}&2b^2 + 2c^2 = 5a^2,\\ &ac^3 + a^3c + 2a^2c^2 - a^2b^2 - 3ab^2c - b^2c^2 = 0.\end{aligned}$$

Si eliminamos b de estas relaciones, obtenemos ésta otra:

$$a^2c^2 + 8ac^3 + 2c^4 - 5a^4 - 13a^3c = 0$$

Escribiendo $c = ka$, resulta que k debe ser una raiz del polinomio

$$P(x) = 2x^4 + 8x^3 + x^2 - 13x - 5.$$

Haciendo el cambio $x = y - 1$, la ecuación $P(x) = 0$ se convierte en

$$y^4 - \frac{11}{2}y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{3}{2} = 0,$$

una ecuación de la forma $y^4 + py^2 + qy + r = 0$. La *resolvente cúbica* de esta ecuación es la ecuación de tercer grado

$$8z^3 + 20pz^2 + (16p^2 - 8r)z + 4p^3 - q^2 - 4pr = 0,$$

en nuestro caso la ecuación $32z^3 - 440z^2 + 1888z - 2531 = 0$. Que la ecuación $P(x) = 0$ tenga alguna solución construible con regla y compás equivale a decir que la resolvente cúbica tenga una solución racional, lo cual no es cierto.

Una vez que hemos comprobado que el problema no es soluble con regla y compás, buscamos una solución mediante otras curvas, usando *Cabri*.

Para ello:

1. Fijamos dos vértices B, C del triángulo buscado.
2. Hallamos el punto medio del segmento BC. La condición $m_a = a$ exige que A esté sobre la circunferencia de centro M y radio BC.
3. Consideramos un punto A variable sobre esta circunferencia y calculamos su bisectriz BE.
4. En general será $w_b = BE \neq b$. Es decir si situamos E' sobre la recta BE tal que $BE' = b$, en general será $E' \neq E$.
5. La solución del triángulo vendrá dada cuando $E' = E$.
6. Usamos la herramienta *Lugar geométrico* de Cabri para hallar los lugares geométricos de E y E' al variar A sobre la circunferencia de centro M y radio BC.

7. El lugar geométrico de E parece una elipse. En realidad, esto no es cierto. Haciendo cálculos podemos obtener que se trata de una cuártica de ecuación $-35a^4 - 104a^3x + 24a^2x^2 + 224ax^3 + 80x^4 + 168a^2y^2 + 352axy^2 + 32x^2y^2 - 48y^4 = 0$.
8. El lugar geométrico de E' es una curva más complicada.
9. Hallando la intersección de ambos lugares geométricos, encontramos el punto $E_0 = E = E'$ de la solución. La solución A_0BC se obtiene siendo BA_0 la recta simétrica de BC respecto de BE_0.