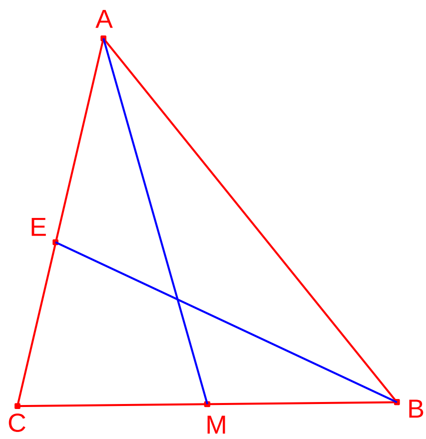
Problema 786

Construir un triangle tal que $m_a = a$ i $w_b = b$.

Solució de Ricard Peiró i Estruch.



Siga $a = 1$.

Aplicant la mesura de la mitjana:

$1 = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - 1}}{2}$. Simplificant:

$2b^2 + 2c^2 = 5$.

Aplicant la propietat de la bisectriu:

$\frac{\overline{CE}}{1} = \frac{b - \overline{CE}}{c} = \frac{b}{1+c}$. $\overline{CE} = \frac{b}{1+c}$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{BCE}$;

$\frac{b}{(1+c)\sin\frac{B}{2}} = \frac{b}{\sin C}$.

$(1+c)\sin\frac{B}{2} = \sin C$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\sin C = \frac{c}{b}\sin B$

$(1+c)\sin\frac{B}{2} = \frac{c}{b}\sin B = 2\frac{c}{b}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$. Simplificant:

$b(1+c) = 2c \cdot \cos\frac{B}{2}$. Elevant al quadrat:

$b^2(1+c)^2 = 4c^2 \cdot \frac{1+\cos B}{2}$. Aplicant el teorema del cosinus:

$b^2(1+c)^2 = 2c^2 \cdot \left(1 + \frac{b^2 - 1 - c^2}{-2c}\right)$. Simplificant:

$b^2\left(1 + 3c + c^2\right) = 2c^2 + c + c^3$.

$b^2 = \frac{5 - 2c^2}{2}$, aleshores:

$\frac{5 - 2c^2}{2}\left(1 + 3c + c^2\right) = 2c^2 + c + c^3$. Simplificant:

$2c^4 + 8c^3 + c^2 - 13c - 5 = 0$. Resolent l'equació:

$c \approx 1.2303056549$.

Aleshores, $b \approx 0.9931505475$.