Problema 786

Construir un triángulo tal que $m_a = a$ i $w_b = b$.

Solución de Ricard Peiró i Estruch.

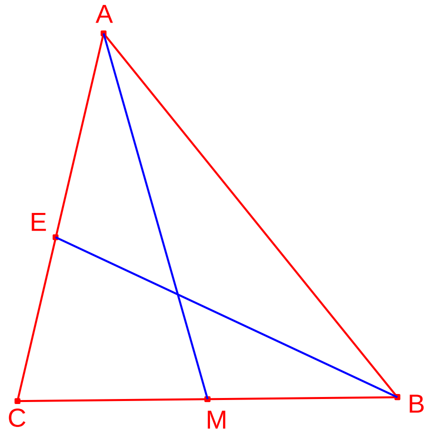
Sea $a = 1$.

Aplicando la medida de la mediana:

$1 = \dfrac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - 1}}{2}$. Simplificando:

$2b^2 + 2c^2 = 5$.

Aplicando la propiedad de la bisectriz:



$\dfrac{\overline{CE}}{1} = \dfrac{b - \overline{CE}}{c} = \dfrac{b}{1+c}$. $\overline{CE} = \dfrac{b}{1+c}$.

Aplicando el teorema de los senos al triángulo $\overset{\Delta}{BCE}$;

$\dfrac{b}{(1+c)\sin\dfrac{B}{2}} = \dfrac{b}{\sin C}$.

$(1+c)\sin\dfrac{B}{2} = \sin C$.

Aplicando el teorema de los senos al triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\sin C = \dfrac{c}{b}\sin B$

$(1+c)\sin\dfrac{B}{2} = \dfrac{c}{b}\sin B = 2\dfrac{c}{b}\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}$. Simplificando:

$b(1+c) = 2c \cdot \cos\dfrac{B}{2}$. Elevando al cuadrado:

$b^2(1+c)^2 = 4c^2 \cdot \dfrac{1+\cos B}{2}$. Aplicando el teorema del coseno:

$b^2(1+c)^2 = 2c^2 \cdot \left(1 + \dfrac{b^2 - 1 - c^2}{-2c}\right)$. Simplificando:

$b^2\left(1 + 3c + c^2\right) = 2c^2 + c + c^3$.

$b^2 = \dfrac{5 - 2c^2}{2}$, entonces:

$\dfrac{5 - 2c^2}{2}\left(1 + 3c + c^2\right) = 2c^2 + c + c^3$. Simplificando:

$2c^4 + 8c^3 + c^2 - 13c - 5 = 0$. Resolviendo la ecuación:

$c \approx 1.2303056549$.

Entonces, $b \approx 0.9931505475$.