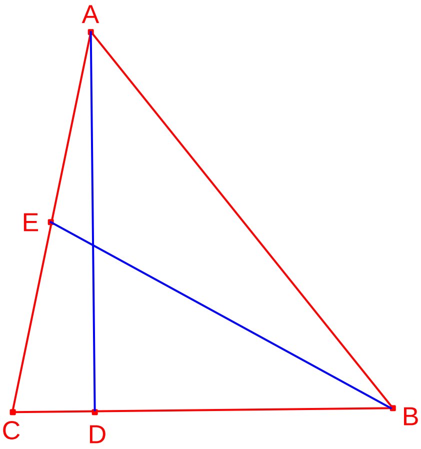
Problema 788

Construir un triangle tal que $h_a = a$ i $m_b = b$.

Solució de Ricard Peiró i Estruch.

Siga $a = 1$.



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CDA}$:

$\frac{1}{b} = \sin C$.

$\sqrt{1-\frac{1}{b^2}} = \cos C$.

Aplicant Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\sqrt{1-\frac{1}{b^2}} = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2b}$. Simplificant:

$$b^2 - 1 = \frac{-c^2 + 1 + b^2}{2} \qquad (1)$$

Aplicant la mesura de la mitjana:

$b = \frac{\sqrt{2 + 2c^2 - b^2}}{2}$. Simplificant:

$5b^2 = 2 + 2c^2$.

$$b^2 = \frac{2 + 2c^2}{5} \qquad (2)$$

Substituint l'expressió (2) en l'expressió (1)

$\sqrt{\frac{2c^2 - 3}{5}} = \frac{-3c^2 + 7}{10}$. Resolent l'equació biquadrada:

$c = \frac{\sqrt{41 - 10\sqrt{7}}}{3} \approx 1.271153758$, $b = \frac{2\sqrt{5 - \sqrt{7}}}{3} \approx 1.222904077$.

L'altra solució és:

$c = \frac{\sqrt{41 + 10\sqrt{7}}}{3} \approx 2.737750762$, $b = \frac{2\sqrt{5 + \sqrt{7}}}{3} \approx 1.843396781$.