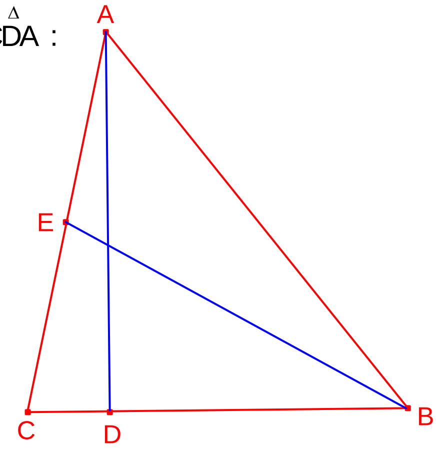
Problema 788

Construir un triánguilo tal que $h_a = a$ i $m_b = b$.

Solució de Ricard Peiró i Estruch.

Siga $a = 1$.



Aplicando razones trigonométricas al triánguilo rectánguilo $\overset{\Delta}{CDA}$:

$$\frac{1}{b} = \sin C.$$

$$\sqrt{1-\frac{1}{b^2}} = \cos C.$$

Aplicando el teorema del coseno al triánguilo $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\sqrt{1-\frac{1}{b^2}} = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2b}$$. Simplificando:

$$b^2 - 1 = \frac{-c^2 + 1 + b^2}{2} \qquad (1)$$

Aplicando la medida de la mediana:

$$b = \frac{\sqrt{2 + 2c^2 - b^2}}{2}$$. Simplificando:

$$5b^2 = 2 + 2c^2.$$

$$b^2 = \frac{2 + 2c^2}{5} \qquad (2)$$

Substituyendo la expresión (2) en la expresión (1)

$$\sqrt{\frac{2c^2 - 3}{5}} = \frac{-3c^2 + 7}{10}$$. Resolviendo la ecuación bicuadrada:

$$c = \frac{\sqrt{41 - 10\sqrt{7}}}{3} \approx 1.271153758, \quad b = \frac{2\sqrt{5 - \sqrt{7}}}{3} \approx 1.022904077.$$

La otra solución es:

$$c = \frac{\sqrt{41 + 10\sqrt{7}}}{3} \approx 2.737750762, \quad b = \frac{2\sqrt{5 + \sqrt{7}}}{3} \approx 1.843396781.$$