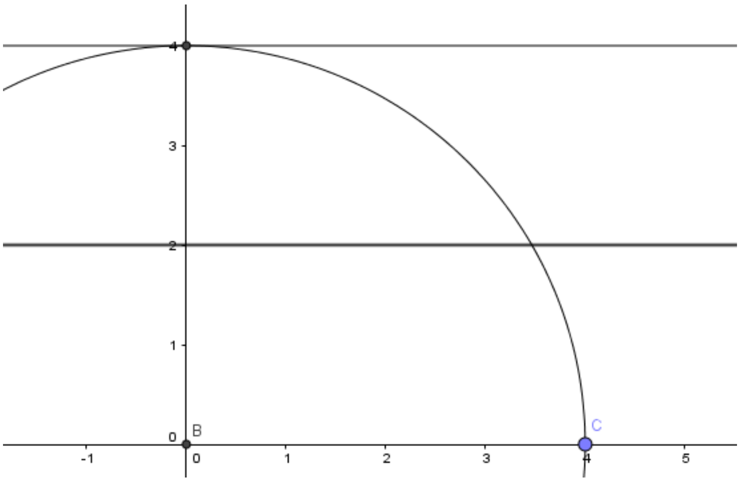
<u>Problema 788:</u> Construir un triángulo ABC, tal que h_a=a, m_b=b.

Barroso. R. (2016): Comunicación personal.

Juan Antonio Villegas Recio: Estudiante de ingeniería informática en la Universidad de Córdoba.

Sea el punto B (0,0) y el punto C (a,*y*[1]), de tal forma que BC=a, trazar una perpendicular a BC que pase por B. A continuación, trazar un arco de circunferencia de centro en B y radio a que corte a la anterior recta perpendicular. Seguidamente, trazar una recta paralela a BC que pase por la intersección del arco con la perpendicular. De esta forma tendremos dos rectas perpendiculares separadas por una distancia a, siendo esta última recta el lugar geométrico del punto A, asegurándonos de que $h_a = a$.

Se sabe que la mediana es el punto que une un vértice con el punto medio del lado opuesto, al que llamaremos M. Por el teorema de Tales sabemos que si AM=CM; entonces M estará a una distancia de $h_a/2 = a/2$ de a. por lo que estableceremos una recta horizontal que equidiste de las dos anteriores, siendo esta el lugar geométrico del punto M. Como $m_b = b$, BM=b y MC=b/2, es decir, la distancia del punto B a M es el doble que la distancia del punto M a C. El objetivo es encontrar un punto a una altura a/2 de CB tal que la razón MB/MC=2.



Busqué una solución hallando una función en la que f(x) denotara c/b en función de x, para así buscar a qué distancia de B estaría la proyección del punto M (M') en el eje x, la solución sería aquel valor de x tal que f(x)=2.

$$f(x) = \frac{c}{b}$$

Para ello hay que definir c y b en función de a y x, usando el teorema de pitágoras y considerando que el punto M' estaría a x unidades de B y a-x unidades de C

[1] Por simplicidad tomaremos el valor y=0.

$$c = \sqrt{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \qquad b = \sqrt{(a-x)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

Así:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}{(a-x)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = 2;$$

Desarrollando:

$$\frac{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}{(a-x)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 4; \quad x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 4(a-x)^2 + 4\left(\frac{a}{2}\right)^2;$$

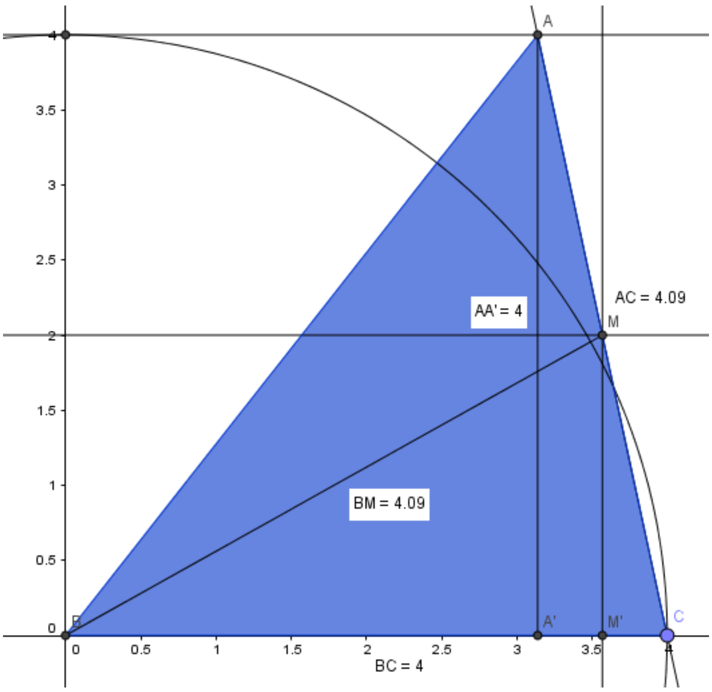
$$x^2 = 4(a^2 - 2ax + x^2) + 3\left(\frac{a}{2}\right)^2;$$

$$3x^2 - 8ax + \left(3\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 4a^2\right) = 0$$

La solución de esa ecuación será la coordenada en x de M, y su coordenada en y será a/2, como hemos dicho anteriormente.

Ya hallado el punto M, la intersección de CM con la recta y=a nos determinará el punto A.

Veamos el ejemplo del caso a=4, en este caso M= (3.5694, 2).



Podemos comprobar que
$h_a = AA' = a = BC = 4$

$m_b = BM = b = AC = 4'09$

Pero además, hay que tener en cuenta que toda ecuación de segundo grado tiene dos soluciones, por lo tanto podemos afirmar que para cada valor de *a* existen dos posibles valores de *b*, en este caso el otro valor de M, que llamaremos M_1 es 7’0971.

Vemos que esta solución también se verifica: