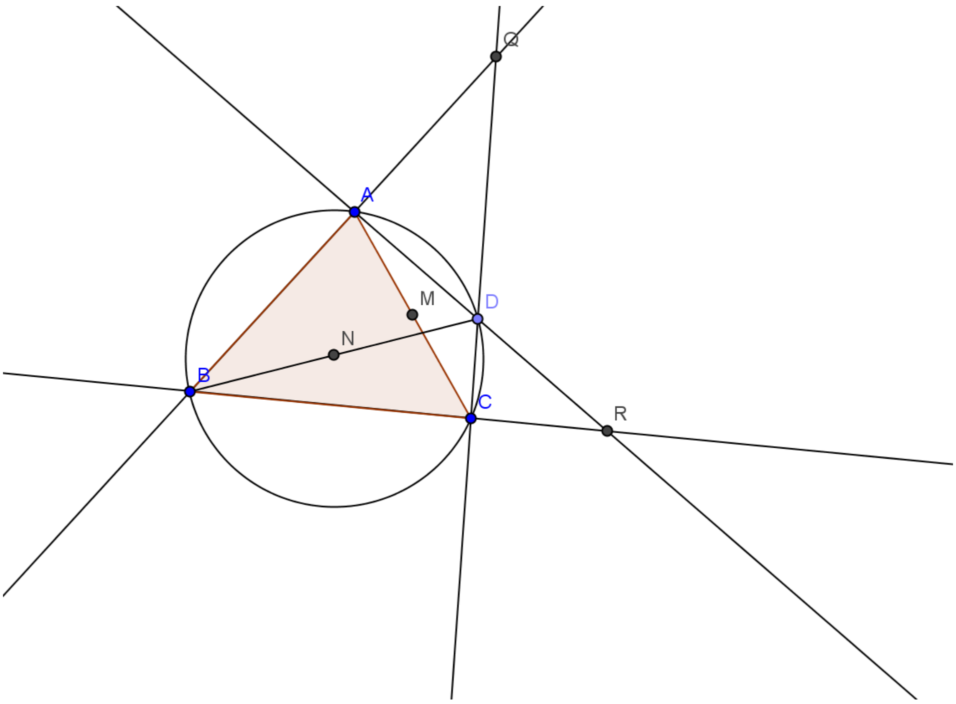
Propuesto por Philippe Fondanaiche, webmaster de www.diophante.fr

Problema 789

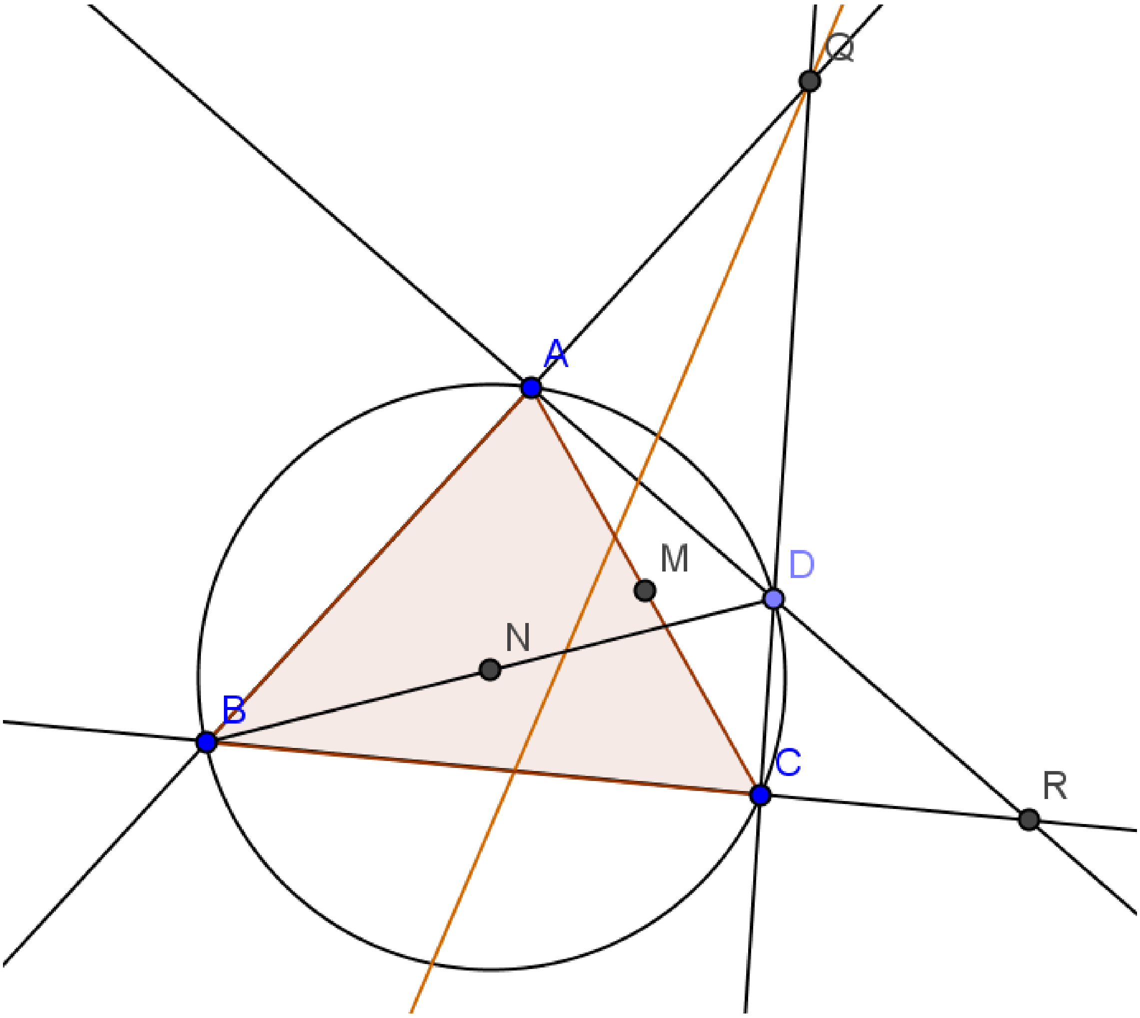
Sea ABC y sea D un punto cualquiera de la circunferencia circunscrita a ABC.. Las rectas AB y CD se cortan en un punto Q. Las rectas BC y AD se cortan en un punto R. Sean M y N los puntos medios de las cuerdas AC y BD. Demostrar que la suma de los ángulos de QMR y QNR permanece constante e igual a 180º (módulo 360º) cuando D recorre la circunferencia circunscrita.

Tournament of the Towns Senior. A level Fall 2015 Problem n°4

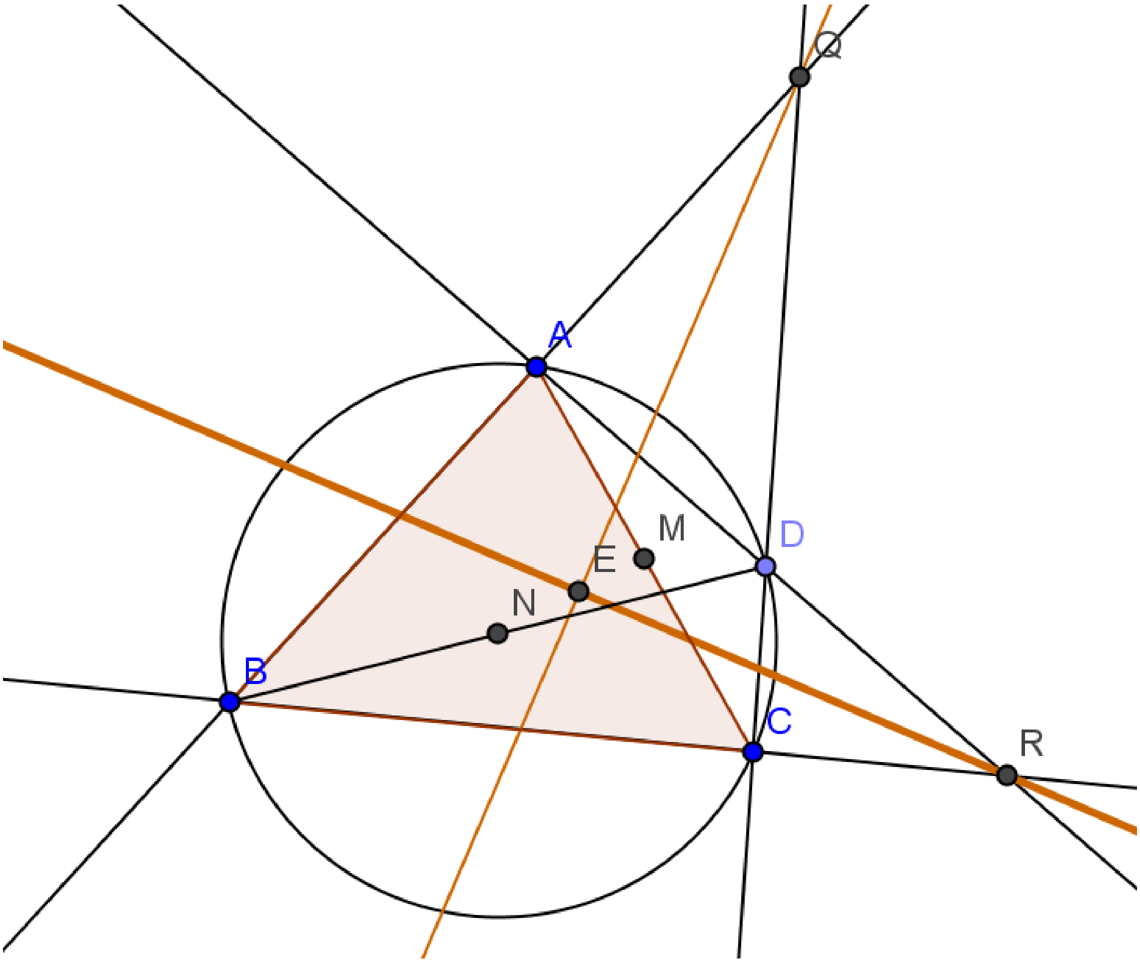
Solución del director.



Debido a ser los triángulos QAC y QDB semejantes, los ángulos MQC y NQB son iguales, lo que significa que si consideramos el triángulo NQM, la bisectriz interior de los triángulos BQC, AQC, y NQM es la misma.



De manera análoga, la bisectriz interior de los triángulos ARB, ARC y MRN coincide.



Ambas bisectrices construidas se cortan en un punto E, que se pertenece a MN.

A continuación estudiamos el ángulo QER.

Sea $\angle ABC = \beta, \angle BAD = \omega$

Es $\angle ARB = 180º - \beta - \omega$

Es por tanto, $\angle ERB = 90º - \frac{\beta}{2} - \frac{\omega}{2}$

Sea $\angle RBE = \zeta$

Será pues, $\angle BER = 90º + \frac{\beta}{2} + \frac{\omega}{2} - \zeta$

Por otra parte, $\angle BCQ = \angle BCD = 180º - \angle BAD = 180º - \omega$

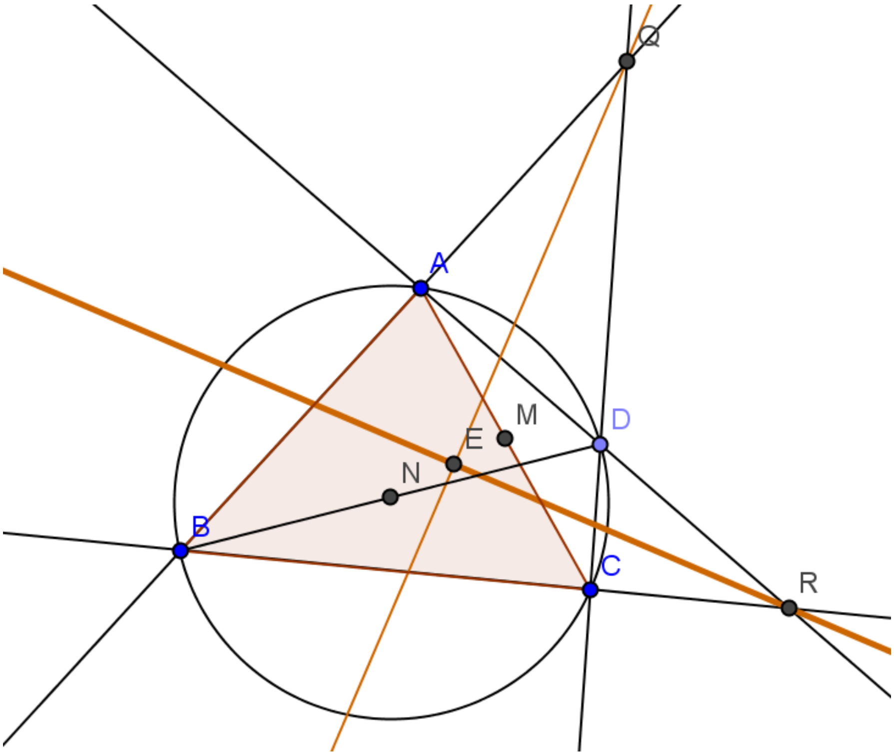
$\angle BQC = 180º - \beta - 180º + \omega = \omega - \beta$, $\angle BQE = \frac{\omega}{2} - \frac{\beta}{2}$, $\angle EBQ = \beta - \zeta$

Así $\angle BEQ = 180º - \frac{\omega}{2} + \frac{\beta}{2} - \beta + \zeta = 180º - \frac{\omega}{2} - \frac{\beta}{2} + \zeta$

Así,

$\angle QER = 360º - \angle BER - \angle BEQ = 360º - \left(90º + \frac{\beta}{2} + \frac{\omega}{2} - \zeta\right) - (180º - \frac{\omega}{2} - \frac{\beta}{2} + \zeta)$ =90º

Así el ángulo QER es recto, y como es geométricamente comprensible, E es interior al cuadrilátero QNRM.



Estudiemos el triángulo QEM.

Sea $\angle EQM = \sigma, \angle MEQ = \rho, es: \angle QME = 180º - \sigma - \rho$

Ahora el triángulo QEN.

Es: $\angle NQE = \sigma, \angle QEN = \Omega, \angle QNE = 180º - \sigma - \Omega$

Estudiemos el triángulo REM.

Sea $\angle MRE = \zeta$. Es $\angle REM = 90º - \angle MEQ = 90º - \rho$, luego

$$\angle RME = 180º - \zeta - (90º - \rho) = 90º + \rho - \zeta$$

En el triángulo REN tenemos:

$\angle ERN = \zeta$, $\angle NER = 360º - (90º - \rho) - \rho - \Omega = 270º - \Omega$

Por ello $\angle RNE = \Omega - \zeta - 90º$

Por todo ello, $< RNQ = 90º - \sigma - \zeta$

Y $\angle RMQ = 360º - \ \angle RME - < QME = 360º - (90º + \rho - \zeta) - (180º - \sigma - \rho)$

Es decir, $\angle RMQ = 90º + \zeta + \sigma$

Así se tiene lo pedido.

Ricardo Barroso Campos.

Jubilado.

Sevilla.