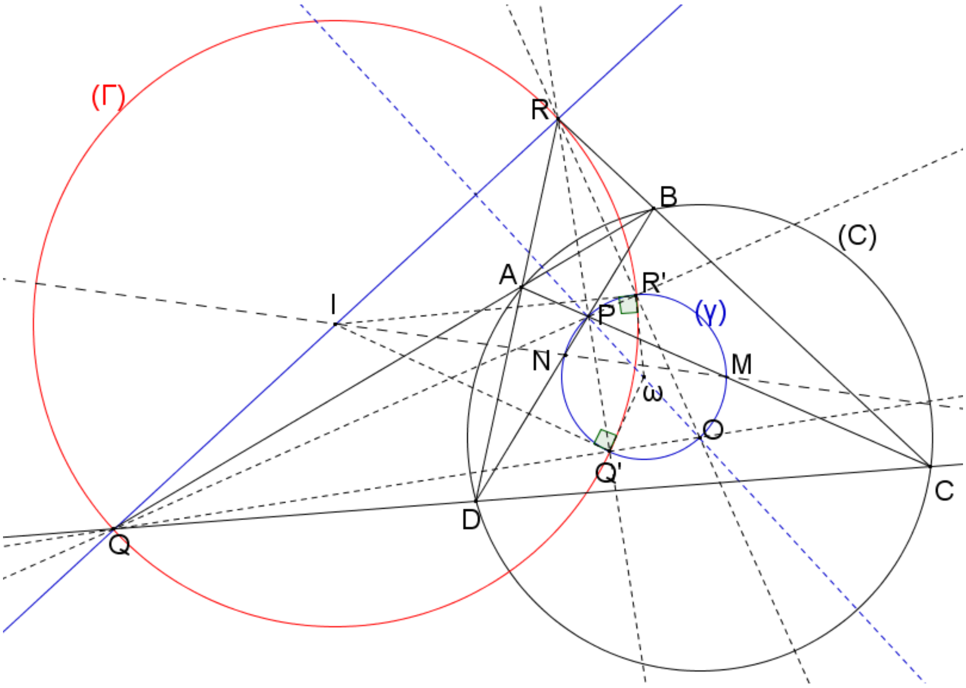
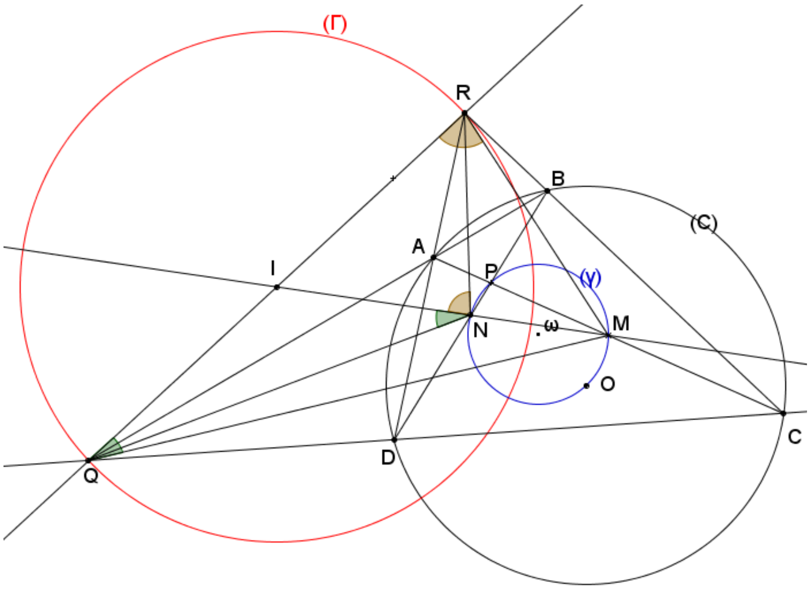
Problema 789
Sea ABC y sea D un punto cualquiera de la circunferencia circunscrita a ABC.. Las rectas AB y CD se cortan en un punto Q. Las rectas BC y AD se cortan en un punto R. Sean M y N los puntos medios de las cuerdas AC y BD. Demostrar que la suma de los ángulos de QMR y QNR permanece constante e igual a 180º (módulo 360º) cuando D recorre la circunferencia circunscrita.
Tournament of the Towns Senior. A level Fall 2015 Problem n°4

Solution proposée par Philippe Fondanaiche
On désigne par:
- P le point d'intersection des droites AC et BD,
- I le milieu du segment QR,
- (𝒞) le cercle circonscrit au quadrilatère ABCD de centre O et de rayon r,
- (Γ) le cercle de diamètre QR et de centre I,
- (γ) le cercle de centre ω, de diamètre OP qui passe par les points M et N tels que OM et ON sont respectivement perpendiculaires à AC et BD.



Lemme n°1: les points M,N et I sont alignés.
Démonstration: cette propriété résulte du **théorème de Newton** selon lequel les milieux des diagonales d'un quadrilatère complet sont alignés.
ABCDQR est le quadrilatère complet, AC,BD et QR sont les trois diagonales ayant pour milieux M,N et I. La démonstration de l'alignement de ces trois points est donnée en annexe.

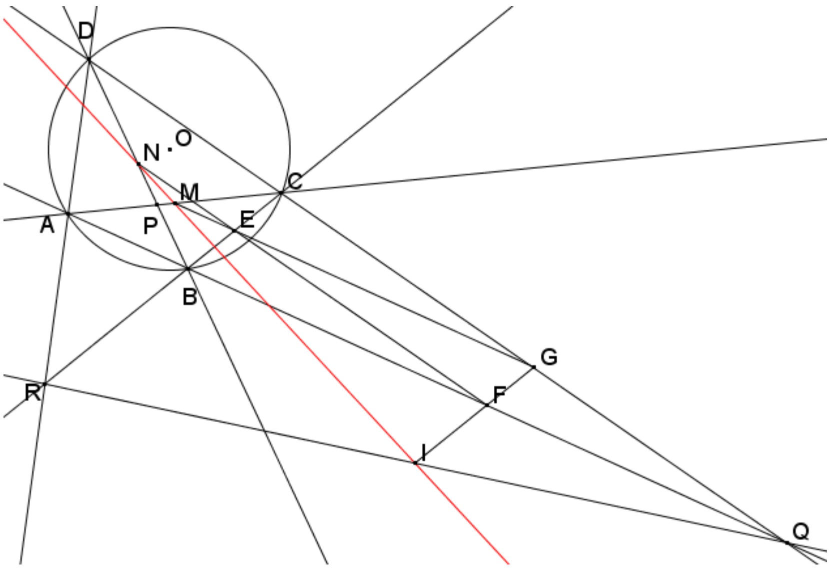
Lemme n°2: le cercle (γ) est l'inverse de la droite QR dans l'inversion (𝔍) de centre O et de puissance r² (r rayon du cercle (𝒞)) .
Démonstration: par construction la droite QR est la polaire du point P par rapport au cercle (𝒞) circonscrit au quadrilatère ABCD. De la même manière, la droite PQ est la polaire de R par rapport à ce même cercle.Elle coupe la droite OR qui lui est perpendiculaire au point R' qui est l'inverse du point R dans l'inversion (𝔍) tandis que la droite PR est la polaire de Q par rapport au cercle (𝒞) et coupe la droite PR qui lui est perpendiculaire au point Q', inverse de Q selon la même inversion(𝔍). Comme les angles ∠QQ'R et ∠QR'R sont droits, les points Q' et R' appartiennent aussi bien au cercle (Γ) qu'au cercle (γ), ce qui permet de conclure que ce dernier est l'inverse de la droite QR dans l'inversion (𝔍). Les deux cercles (Γ) et (γ) sont orthogonaux entre eux et les tangentes issues de I au cercle (γ) sont les droites IQ' et IR'.
Il en résulte: $IM.IN = IQ'^2 = IQ^2 = IR^2$.



Lemme n°3: les triangles IQM et INQ d'une part et les triangles IRM et INR d'autre part sont semblables entre eux.
Démonstration: d'après les égalités IM.IN = IQ^2 = IR^2, on déduit IM/IQ = IQ/IN et IM/IR = IR/IN avec l'angle ∠MIQ commun aux triangles IQM et INQ et l'angle ∠MIR commun aux triangles IRM et INR.

Il en résulte: ∠MQI = ∠QNI et ∠MRI = ∠RNI.
Or ∠QMR = 180° – ∠MRI – ∠MQI (modulo 360°) et ∠QNR = ∠QNI + ∠RNI (modulo 360°).
Donc ∠QMR + ∠QNR = 180° (modulo 360°)
Cqfd

Annexe:
Démonstration du théorème de Newton.



On trace le triangle EFG dont les sommets sont les milieux des côtés du triangle BCQ.
Le théorème de Menelaüs appliqué au triangle BCQ avec la droite AD donne la relation:
(AB/AQ)*(RC/RB)*(DQ/DC) = 1.
Or AB/AQ = ME/MG, RC/RB = IG/IF et DQ/DC = NF/NE.
Il en résulte que (ME/MG)*(IG/IF)*(NF/NE) = 1 et cette relation est obtenue quand les points M,N et I sont alignés.