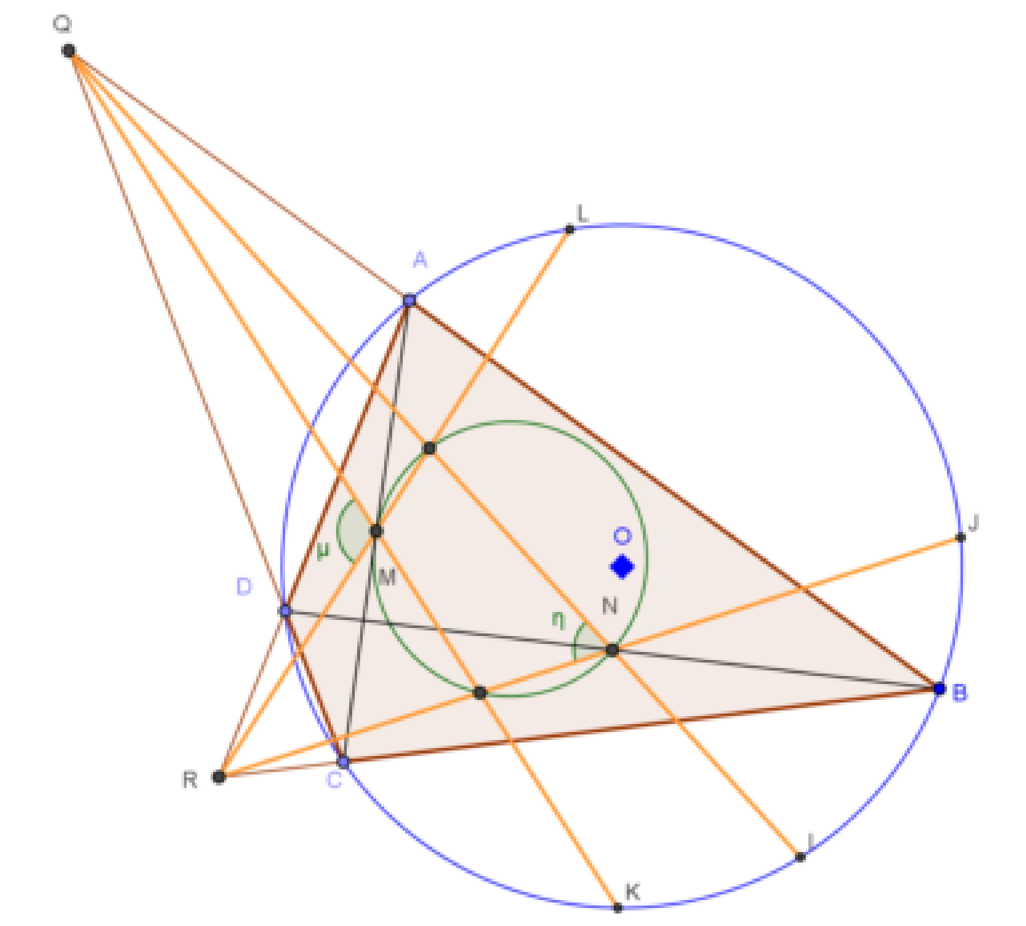
Quincena del 16 al 31 de Octubre de 2016.

Propuesto por Philippe Fondanaiche, webmaster de www.diophante.fr

Problema 789.- *Sea ABC un triángulo y sea D un punto cualquiera de la circunferencia circunscrita a ABC. Las rectas AB y CD se cortan en un punto Q. Las rectas BC y AD se cortan en un punto R. Sean M y N los puntos medios de las cuerdas AC y BD. Demostrar que la suma de los ángulos de QMR y QNR permanece constante e igual a 180º (módulo 360º) cuando D recorre la circunferencia circunscrita.*

Tournament of the Towns Senior. A level Fall 2015. Problema nº 4.



Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Por la potencia de R respecto de la circunscrita, los triángulos ACR y BDR son semejantes. De ahí tenemos que

$$\frac{AM}{AR} = \frac{AC}{2AR} = \frac{BD}{2BR} = \frac{BN}{BR}.$$

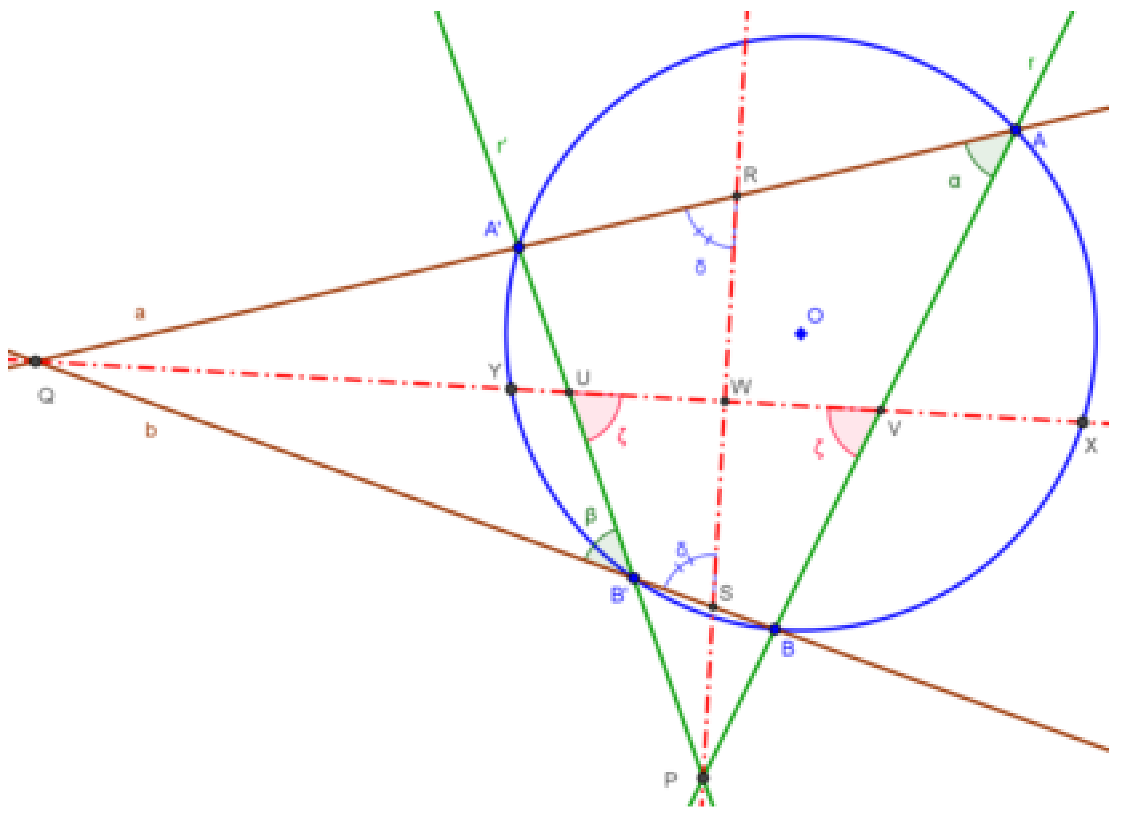
La igualdad entre la primera y la última de estas razones demuestra la semejanza de los triángulos AMR y BNR, o lo que es igual, las rectas RM y RN son isogonales en el triángulo ARB.

De forma análoga QM y QN también son isogonales (en ΔCQB) y por esta razón las bisectrices de MQN y MRN son también las bisectrices de BQC y ARB respectivamente. Estas bisectrices son perpendiculares, pues $ABCD$ es cíclico y por tanto también es cíclico el cuadrilátero determinado por la intersección de los dos pares de rectas isogonales RM y RN con QM y QN. Estas rectas son **antiparalelas.**

Para aclarar más esto vamos dar una caracterización de las **rectas antiparalelas.**

Supongamos que tenemos dos rectas r' y r que se cortan en P y otro par de rectas a y b se cortan en Q. Los puntos de intersección de estos dos pares de rectas definen un cuadrilátero $A'B'BA$. Diremos que las rectas (r, r') son **antiparalelas** respecto de las (a, b) si se cumple alguna de las siguientes condiciones equivalentes.

1. Los ángulos $A'AB$ y $A'B'Q$ son iguales.
2. El cuadrilátero $A'B'BA$ es cíclico.
3. Las bisectrices de los ángulos APB' y $A'QB$ son perpendiculares.



Demostremos la equivalencia de esas condiciones:

1 ⇒ 2

Si los ángulos marcados como α y β son iguales entonces los triángulos AQB y $B'QA'$ son semejantes por tener en común el ángulo en Q, por tanto $\frac{QA}{QB} = \frac{QB'}{QA}$, o bien

$$QA \cdot QA' = QB \cdot QB',$$

que nos indica que los puntos $AA'BB'$ yacen en una circunferencia.

2 ⇒ 3 Demostraremos que el triángulo PUV es isósceles viendo que son iguales los ángulos de los vértices U y V.

Vamos a calcular estos ángulos teniendo en cuenta que el ángulo interior (exterior) a una circunferencia es igual a la semisuma (semidiferencia) de los arcos que abarca en esa circunferencia.

Si QX es la bisectriz de Q, el ángulo $A'QB$ es igual a cualquiera de estas dos diferencias:

$\measuredangle A'QB = \text{arco}(XA) - \text{arco}(A'Y)$

$\measuredangle A'QB = \text{arco}(BX) - \text{arco}(YB')$

De ambas expresiones se deduce que

$$\mathbf{arco}(XA) + \mathbf{arco}(YB') = \mathbf{arco}(BX) + \mathbf{arco}(A'Y) \quad (*)$$

El ángulo PUV es la semisuma de los arcos de circunferencia $A'Y$, $B'B$ y BX.

El ángulo PVU es la semisuma de los arcos de circunferencia XA, YB' y $B'B$.

La igualdad de estos ángulos se sigue de inmediato de la expresión $(*)$.

Si ΔPUV es isósceles, las bisectrices de los ángulos APB' y $A'QB$ son perpendiculares.

3 ⇒ 1 En el cuadrilátero $UWSB'$ obtenemos para el ángulo marcado en B':

$180 - \measuredangle B' = 360 - (90 + \delta + \zeta)$, de donde $\measuredangle B' = \delta + \zeta - 90$.

En el cuadrilátero $AVWR$ para el ángulo marcado en A se tiene

$\measuredangle A = 360 - (90 - (180 - \delta) - (180 - \zeta)) = \delta + \zeta - 90.$

Con esto concluimos la equivalencia. ■