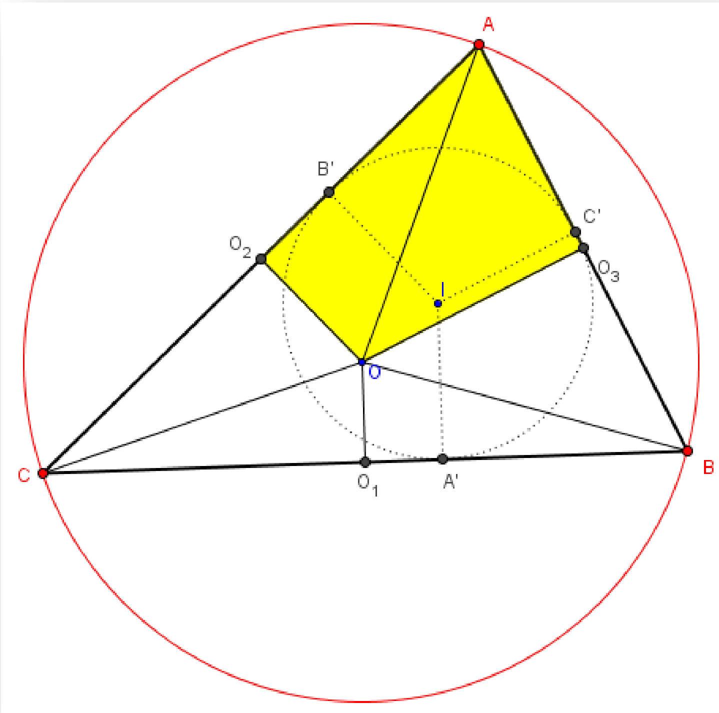
Problema 790.-
Dado un triángulo ABC, sean O_1, O_2, O_3 los puntos medios de los lados. Sean R el radio de la circunferencia circunscrita y r el radio de la circunferencia inscrita. Sea O el circuncentro.
Demostrar que $OO_1 + OO_2 + OO_3 = R + r$.

Johnson, R. A. (1960): Advanced Euclidean Geometry.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Este resultado se conoce como ***Teorema de Carnot*** y su demostración la basaremos en la aplicación reiterativa del Teorema de Ptolomeo en los distintos cuadriláteros cíclicos $AO_3OO_2,\ BO_1OO_3\ y\ CO_2OO_1$ que aparecen en la figura dada.



Sea por ejemplo el cuadrilátero AO_3OO_2.
Se verificará pues que:
$AO_2 \cdot OO_3 + AO_3 \cdot OO_2 = AO \cdot O_2O_3$.

Por tanto,
$\frac{a}{2} \cdot R = \frac{b}{2} \cdot OO_3 + \frac{c}{2} \cdot OO_2 \rightarrow$
$a \cdot R = b \cdot OO_3 + c \cdot OO_2$.

En definitiva, reiterando el mismo proceso para los otros dos cuadriláteros cíclicos, obtenemos las relaciones:

$a \cdot R = b \cdot OO_3 + c \cdot OO_2$.
$b \cdot R = a \cdot OO_3 + c \cdot OO_1$.
$c \cdot R = a \cdot OO_2 + b \cdot OO_1$.

Sumando las anteriores relaciones,
$(a + b + c)R = a(OO_2 + OO_3) + b(OO_3 + OO_1) + c(OO_1 + OO_2)$

Por otro lado, si notamos $[ABC] = Área(\Delta ABC)$ entonces $a \cdot OO_1 + b \cdot OO_2 + c \cdot OO_3 = 2[ABC]$
Además sabemos que $(a + b + c) \cdot r = 2[ABC]$.
Por tanto, si consideramos ambas relaciones simultáneamente, deducimos que:

$$(a + b + c) \cdot R + (a + b + c) \cdot r = a(OO_2 + OO_3) + b(OO_3 + OO_1) + c(OO_1 + OO_2) + 2[ABC]$$

$$(a + b + c)(R + r) = a(OO_2 + OO_3) + b(OO_3 + OO_1) + c(OO_1 + OO_2) + a \cdot OO_1 + b \cdot OO_2 + c \cdot OO_3$$

$$(a + b + c)(R + r) = (a + b + c)(OO_1 + OO_2 + OO_3)$$

$\boldsymbol{R + r = OO_1 + OO_2 + OO_3 \quad cqd}$ ∎