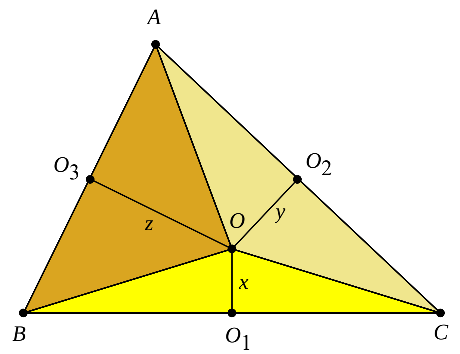
Problema 790. Dado un triángulo $\triangle ABC$, sean O_1, O_2, O_3 los puntos medios de los lados. Sean R el radio de la circunferencia circunscrita y r el radio de la circunferencia inscrita. Sea O el cincuncentro. Demostrar que

$$OO_1 + OO_2 + OO_3 = R + r.$$

Johnson, R.A. (1960): Advanced Euclidean Geometry. (p. 190).

Solución de Ercole Suppa. Utilizamos las notaciones de geometría del triángulo: $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ y ponemos $OO_1 = x$, $OO_2 = y$, $OO_3 = z$. Se distinguen dos casos:

Primero caso.



Si $\triangle ABC$ es un triángulo acutángulo por supuesto tenemos

$$\begin{aligned}
[ABC] = [OAB] + [OBC] + [OAC] \quad &\Leftrightarrow \\
\frac{1}{2}(a+b+c)r = \frac{1}{2}(ax+by+cz) \quad &\Leftrightarrow \\
r = \frac{ax+by+cz}{a+b+c} &
\end{aligned} \tag{1}$$

Siendo $x = R\cos A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$ tenemos

$$(b+c)x = 2R^2\left[\cos A(\sin B + \sin C)\right] = 2R^2\left(\cos A\sin B + \cos A\sin C\right) \tag{2}$$

y del mismo modo

$$(c+a)y = 2R^2\left(\cos B\sin C + \cos B\sin A\right) \tag{3}$$

$$(a+b)z = 2R^2\left(\cos C\sin A + \cos C\sin B\right) \tag{4}$$

Por lo tanto teniendo en cuenta (2), (3) y (4) tenemos

$$\begin{aligned}
(b+c)x + (c+a)y + (a+b)z &= 2R^2\left[\sin(A+B) + \sin(B+C) + \sin(C+A)\right] \\
&= 2R^2\left(\sin A + \sin B + \sin C\right) \\
&= 2R^2\left(\frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R}\right) \\
&= R(a+b+c)
\end{aligned}$$

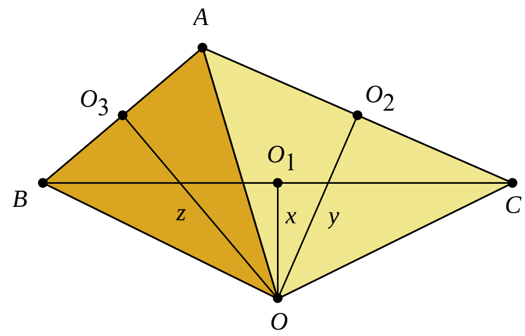
de donde se deduce que

$$R = \frac{(b+c)x + (c+a)y + (a+b)z}{a+b+c} \tag{5}$$

Por último a partir de (1) y (5) obtenemos

$$R + r = \frac{(b+c)x + (c+a)y + (a+b)z}{a+b+c} + \frac{ax+by+cz}{a+b+c} = x + y + z = OO_1 + OO_2 + OO_3$$

Segundo caso.



Si $\triangle ABC$ es un triángulo obtuso, suponiendo sin pérdida de generalidad que $\angle BAC > 90°$, tenemos

$$[ABC] = [OAB] + [OAC] - [OBC] \quad \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{2}(a+b+c)r = \frac{1}{2}(-ax+by+cz) \quad \Leftrightarrow$$
$$r = \frac{-ax+by+cz}{a+b+c} \tag{6}$$

Siendo $x = R\cos(180° - A) = -R\cos A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$ tenemos

$$(b+c)x = 2R^2\left[-\cos A(\sin B + \sin C)\right] = -2R^2\left(\cos A \sin B + \cos A \sin C\right) \tag{7}$$

A partir de (3),(4) y (7) se deduce que

$$-(b+c)x + (c+a)y + (a+b)z = R(a+b+c) \qquad \Rightarrow$$
$$R = \frac{-(b+c)x + (c+a)y + (a+b)z}{a+b+c} \tag{8}$$

y luego, teniendo en cuenta (6) y (8), tenemos

$$R + r = \frac{-(b+c)x + (c+a)y + (a+b)z}{a+b+c} + \frac{-ax+by+cz}{a+b+c} = -x+y+z = -OO_1 + OO_2 + OO_3$$

así que la prueba se ha completado.

$\square$