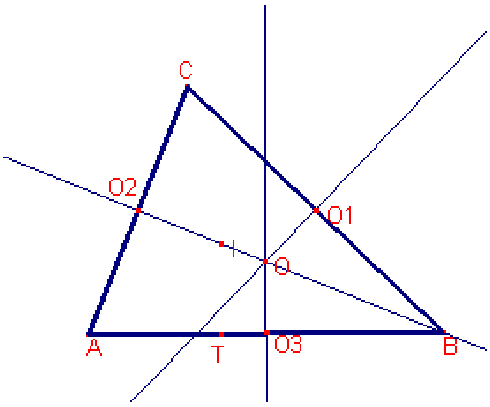
Problema 790

Teorema de Carnot:

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ acutangle. Siguen els punts O, I el circumcentre i l'incentre del triangle, respectivament. Siguen R, r els radis de les circumferències circumscrita i inscrita al triangle, respectivament.
Siguen O_1, O_2, O_3 els punts mig dels costats.
Aleshores: $\overline{OO_1} + \overline{OO_2} + \overline{OO_3} = R + r$.



Demostració:
Siga O el centre de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de radi R.

Siga r el radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siguen O_1, O_2, O_3 els punts mig dels costats a, b, c, respectivament.

$\text{Àrea}\,\overset{\Delta}{ABC} = rp$, on p és el semiperímetre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

$\text{Àrea}\,\overset{\Delta}{ABC} = \text{Àrea}\,\overset{\Delta}{ABO} + \text{Àrea}\,\overset{\Delta}{BCO} + \text{Àrea}\,\overset{\Delta}{ACO}$.

Per tant, $2 \cdot rp = a \cdot \overline{OO_1} + b \cdot \overline{OO_2} + c \cdot \overline{OO_3}$ (1)

El quadrilàter AO_2OO_3 és cíclic ja que $\angle AO_3O = \angle AO_2O = 90^o$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{AO_2O_3}$ són semblants i la raó de semblança és 2:1

Per tant el radi de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{AO_2O_3}$ és $\frac{R}{2}$

$\angle OO_2O_3 = 90^o - C$, $\angle OO_3O_2 = 90^o - B$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{AO_2O_3}$,

$\frac{\overline{OO_2}}{\sin(90^o - B)} = \frac{\overline{OO_3}}{\sin(90^o - C)} = 2\left(\frac{R}{2}\right)$. Aleshores, $\overline{OO_2} = R \cdot \cos B$, $\overline{OO_3} = R \cdot \cos C$

Anàlogament, $\overline{OO_1} = R \cdot \cos A$

Sabem que:

$a = c \cdot \cos B + b \cdot \cos C$

$b = c \cdot \cos A + a \cdot \cos C$

$c = b \cdot \cos A + a \cdot \cos B$

Sumant les tres equacions:

$2p = (b + c)\cos A + (a + c)\cos B + (a + b)\cos C$

Multiplicant l'equació per R

$2pR = (b + c)R \cdot \cos A + (a + c)R \cdot \cos B + (a + b)R \cdot \cos C$

Aleshores:

$2pR = (b + c)\overline{OO_1} + (a + c)\overline{OO_2} + (a + b)\overline{OO_3}$ (2)

Sumant (1) i (2)

$2pr + 2pR = (a + b + c)\overline{OO_1} + (a + b + c)\overline{OO_2} + (a + b + c)\overline{OO_3}$

Simplificant:

$\overline{OO_1} + \overline{OO_2} + \overline{OO_3} = R + r$

Nota: si A és obtusangle la fórmula és: $-\overline{OO_1} + \overline{OO_2} + \overline{OO_3} = R + r$