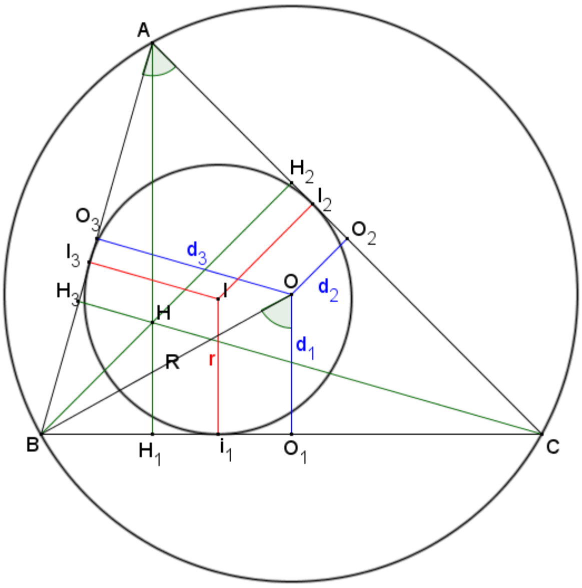
Problema 790.
298. f. Dado un triángulo ABC, sean O_1 O_2 O_3 los puntos medios de los lados. Sean R el radio de la circunferencia circunscrita y r el radio de la circunferencia inscrita. Sea O el cincuncentro.
Demostrar que $OO_1 + OO_2 + OO_3 = R + r$.
Johnson, R.A. (1960): Advanced Euclidean Geometry. (p. 190).

Solution proposée par Philippe Fondanaiche

La relation $OO_1 + OO_2 + OO_3 = R + r$ est connue sous le nom de théorème de Lazare Carnot*
On considère d'abord un triangle acutangle de sorte que le centre O du cercle circonscrit est intérieur au triangle.



On désigne par :
- a,b et c les longueurs des côtés BC,CA et AB du triangle ABC,
- d_1,d_2 et d_3 les distances du centre O du cercle circonscrit au triangle ABC aux milieux des côtés du triangle:
$d_1 = OO_1$, $d_2 = OO_2$ et $d_3 = OO_3$,
- S la surface du triangle ABC,
- R le rayon du cercle circonscrit et r le rayon du cercle inscrit
et
- H_1H_2 et H_3 les pieds des hauteurs issues des sommets A,B et C sur les côtés BC,CA et AB.

On a les deux relations bien connues pour exprimer la surface S:
$2S = (a + b + c)r$ et $2S = ad_1 + bd_2 + cd_3$, ce qui donne la relation **(R_1) = $ad_1 + bd_2 + cd_3$, = $(a + b + c)r$**.

Par ailleurs les triangles rectangles ACH_3,ABH_2 et BOO_1 dont les angles $\angle CAH_3$, $\angle BAH_2$ et $\angle BOO_1$ sont égaux entre eux,sont semblables.
On en déduit $d_1/R = AH_2/c = AH_3/b = (AH_2 + AH_3)/(b + c)$. d'où $d_1(b + c) = R(AH_2 + AH_3)$
On établit deux relations identiques à cette dernière relation en permutant les indices 1,2 et 3,les côtés du triangle et les segments délimités par les pieds des hauteurs sur les côtés.
L'addition des trois relations donne l'équation suivante:
$d_1(b + c) + d_2(c + a) + d_3(a + b) = R\ (AH_2 + AH_3 + BH_3 + BH_1 + CH_1 + CH_2) = R(a + b + c)$
Comme $BH_1 + CH_1 = a$, $AH_2 + CH_2 = b$ et $AH_3 + BH_3 = c$, on obtient la relation
(R_2) : $d_1(b + c) + d_2(c + a) + d_3(a + b) = (a + b + c)R$

L'addition des premier et deuxième membres de (R_1) et de (R_2) donne la relation cherchée après simplification par (a + b + c).

Quand le triangle est obtusangle, il convient d'affecter du signe " – " la distance de O au plus grand côté, c'est à dire la distance qui est entièrement à l'extérieur du triangle ABC.

* A ne pas confondre avec Sadi Carnot, son fils, qui a donné son nom à l'un des principes fondamentaux de la thermodynamique.