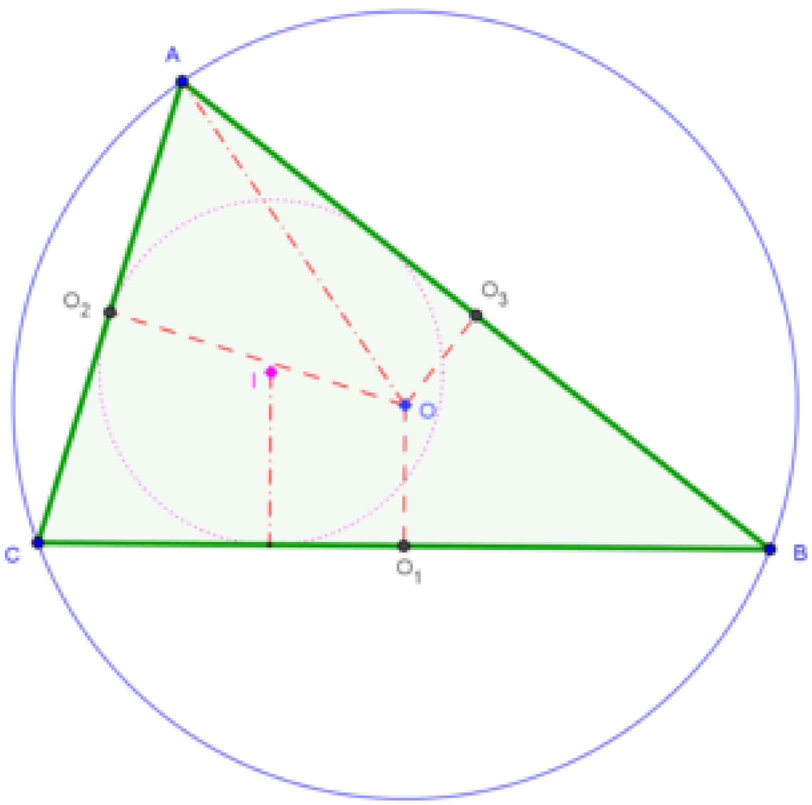
Problema 790.

298. *f. Dado un triángulo ABC, sean $O_1 O_2 O_3$ los puntos medios de los lados. Sean R el radio de la circunferencia circunscrita y r el radio de la circunferencia inscrita. Sea O el cincuncentro.*

Demostrar que $OO_1 + OO_2 + OO_3 = R+r$.

Johnson, R.A. (1960): *Avanced Euclidean Geometry*. (p. 190).

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Del triángulo AOO_3 podemos obtener

$$OO_3 = R \cdot sen(90 - C) = R \cdot \cos C.$$

Así pues tenemos $OO_1 + OO_2 + OO_3 = R(\cos A + \cos B + \cos C)$.

Hay que concluir que esa expresión es igual a la suma de los radios R y r.

Tomamos del problema 749 lo siguiente:

Una de las varias expresiones que ligan los diferentes elementos de un triángulo es

$$r = 4R \cdot sen\,\frac{A}{2} \cdot sen\,\frac{B}{2} \cdot sen\,\frac{C}{2}$$

Con ella $R \cdot \cos A - r = R\left(\cos A - 4 \cdot sen\,\frac{A}{2} \cdot sen\,\frac{B}{2} \cdot sen\,\frac{C}{2}\right)$. *Usaremos* $sen\,\frac{A}{2} = \cos\frac{B+C}{2}$ *para los ángulos de un triángulo cualquiera y otras identidades trigonométricas.*

$$\begin{aligned}
\cos A - 4 \cdot sen\,\frac{A}{2} \cdot sen\,\frac{B}{2} \cdot sen\,\frac{C}{2} &= \cos A + 2 \cdot sen\,\frac{A}{2} \cdot \left(-2 \cdot sen\,\frac{B}{2} \cdot sen\,\frac{C}{2}\right) \\
&= 1 - 2 \cdot \left(sen\,\frac{A}{2}\right)^2 + 2 \cdot sen\,\frac{A}{2} \cdot \left(\cos\frac{B+C}{2} - \cos\frac{B-C}{2}\right) \\
&= 1 - 2 \cdot \left(sen\,\frac{A}{2}\right)^2 + 2 \cdot sen\,\frac{A}{2} \cdot \left(sen\,\frac{A}{2} - \cos\frac{B-C}{2}\right) \\
&= 1 - 2 \cdot sen\,\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B-C}{2} = 1 - 2 \cdot \cos\frac{B+C}{2} \cdot \cos\frac{B-C}{2} \\
&= 1 - \cos B - \cos C
\end{aligned}$$

De ese cálculo se deduce que $1 - (\cos A + \cos B + \cos C) = -\frac{r}{R}$ que sirve para concluir el problema.

■